

Plaidoyer pour l'Algèbre Moderne

Depuis un demi-siècle, le champ des mathématiques s'est fortement étendu. Grande aurait été la perplexité du comité d'examen des candidatures à la médaille Fields si un troll avait en 1960 remplacé les dossiers par ceux de 2014 ! Or les mathématiques sont une des rares sciences dites exactes où des écrits vieux de plusieurs siècles gardent un intérêt scientifique et pas seulement historique.

Par exemple, les polynômes en une variable apparaissent dans les travaux de Viète. De nombreux outils algébriques et analytiques, différentes familles de polynômes orthogonaux, de polynômes d'interpolation ont été ensuite développés, qui permettent un calcul unidimensionnel.

Qui dit "polynôme en une variable" dit aussi "fonctions symétriques" des racines de ce polynôme. Dès 1629, Girard :

Invention nouvelle en l'Algèbre, tant pour la solution des équations, que pour recognoître le nombre des solutions qu'elles reçoivent, avec plusieurs choses qui sont nécessaires à la perfection de cette divine science, Amsterdam (1629).

se pose la question d'exprimer les sommes de puissance en terme des coefficients du polynôme, i.e. en terme des fonctions symétriques élémentaires des racines. Le premier chapitre du livre de Macdonald témoigne de ce que ce sujet, *les changements de base de fonction symétriques*, est resté actif depuis lors. En fait, il existe une base privilégiée, *les fonctions de Schur*. La majorité des problèmes de fonctions symétriques les font intervenir, ainsi que les objets combinatoires associés, *partitions, diagrammes de Ferrers, tableaux de Young*.

On peut donc estimer que l'on dispose, dans le cas des polynômes d'une variable, ou des polynômes symétriques, d'une "boîte à outils" satisfaisante.

Rien de tel dès que l'on abandonne la symétrie. Certes, il existe des polynômes orthogonaux multivariés, des bases de Gröbner, &c., mais quand est-il des analogues d'une question élémentaire telle que

exprimer telle fonction symétrique dans la base des fonctions de Schur

qui intervient dans une bonne partie de la théorie classiques des fonctions symétriques ?

Et tout d'abord, que sont les *fonctions de Schur non symétriques* ?

Pour pouvoir effectuer des changements de base, il faut au moins deux bases ! Le problème se pose même en amont : *de quels outils algébriques* sur les polynômes dispose-t-on ? A ce niveau, il est instructif de constater que pour Maple

et Mathematica, un polynôme en $x_1, \dots, x_n$ est un polynôme en x_1 à coefficients en $x_2, \dots, x_n$. Dans le cas des polynômes symétriques, on voit bien qu’une telle structure est insuffisante.

Or, depuis Newton, on sait “mélanger les variables”. Pour chaque paire x_i, x_{i+1} de variables consécutives, Newton définit une *différence divisée* ∂_i (notée à droite) par

$$f \rightarrow f \partial_i = \frac{f - f^{s_i}}{x_i - x_{i+1}},$$

où s_i est la transposition qui échange x_i, x_{i+1} .

Les différences divisées ont pour cas limite le calcul différentiel usuel, mais satisfont, par rapport à ce dernier, deux propriétés essentielles :

- elles satisfont les *relations de tresse* $\partial_i \partial_{i+1} \partial_i = \partial_{i+1} \partial_i \partial_{i+1}$
- Chaque différence divisée ∂_i commute avec la multiplication par les fonctions symétriques en x_i, x_{i+1} .

En conséquence, les ∂_i sont en fait des opérateurs sur des espaces de dimension 2, il suffit d’ajouter que

$$1 \partial_i = 0 \quad \& \quad x_i \partial_i = 1$$

aux propriétés ci-dessus pour caractériser ∂_i .

On trouve aisément d’autres opérateurs du même type $\pi_i, T_i, \dots$ satisfaisant les relations de tresse ainsi que

$$\begin{aligned} 1 \pi_i &= 1 \quad \& \quad x_{i+1} \pi_i = 0 \\ 1 T_i &= t_1 \quad \& \quad x_{i+1} T_i = -t_2 x_i. \end{aligned}$$

Avec ces outils élémentaires, on peut engendrer récursivement des bases linéaires de l’anneau des polynômes en $x_1, \dots, x_n$ (qui peuvent d’ailleurs toutes postuler, au vu de leurs propriétés combinatoires, au titre de fonctions de Schur non symétriques).

Les ∂_i engendrent les *polynômes de Schubert*, les π_i engendrent les *caractères de Demazure* ainsi que les *polynômes de Grothendieck*, les T_i engendrent les polynômes de Hall-Littlewood ainsi que les polynômes de Macdonald non-symétriques.

Ces objets ayant été construits par récurrence, il appartient dans un premier temps à la combinatoire d’en donner les propriétés, ainsi que leurs relations mutuelles. C’est ce à quoi je me suis attaché avec Marcel-Paul Schützenberger, la combinatoire du groupe symétrique (ou des groupes de Weyl de type B, C, D) jouant un rôle fondamental.

Les 400 pages de *Polynomials* en sont une introduction. Par ailleurs, toutes les formules ont été implémentés en Maple et seront prochainement disponibles dans un fichier indépendant.

Alain Lascoux
2013-09-24