

GÉOMÉTRIE ALGÈBRE. — Caractéristique d'Euler-Poincaré et produit des caractères.

Note de **Alain Lascoux**, présentée par Pierre Deligne.

Remise le 28 mai 1984.

Nous étendons la définition de la caractéristique d'Euler-Poincaré, et nous montrons que, dans le cas des grassmanniennes, cette extension est liée à une identité sur les fonctions symétriques due à Stanley.

ALGEBRAIC GEOMETRY. — Euler-Poincaré Characteristics and Product of Characters.

We show that a formula of Stanley concerning the inner product of Schur functions (i. e. the product of characters of the symmetric group) is linked with an extension of the Euler-Poincaré characteristics of modules on a Grassmann variety.

1. PRODUIT INTÉRIEUR. — L'isomorphisme naturel entre représentations des groupes symétriques et fonctions symétriques envoie le produit tensoriel sur un produit dit *produit intérieur* noté ici $\star$. L'anneau universel **Sym** des polynômes symétriques en une infinité de variables à coefficients entiers a pour $\mathbb{Z}$ -base les fonctions de Schur $\{S_I\}$, où I parcourt l'ensemble des partitions. On munit **Sym** du produit scalaire $(\cdot, \cdot)$ pour lequel $\{S_I\}$ est orthonormée (cf. Macdonald [4]). Une $\mathbb{Q}$ -base de $\mathbf{Sym} \otimes \mathbb{Q}$ consiste en les produits $\psi^K = \psi^i \psi^j \dots$ de fonctions de Newton ψ^i (ψ^i est la somme des i -ièmes puissances; K parcourt l'ensemble des partitions). Cette base est orthogonale et :

$$(1.1) \quad (\psi^K, \psi^K) = 1^{m_1} 2^{m_2} 3^{m_3} \dots m_1! m_2! m_3! \dots \quad \text{si } K = 1^{m_1} 2^{m_2} 3^{m_3} \dots$$

En outre, $(S_I, \psi^K) = \chi_I(K) \in \mathbb{Z}$ est la valeur du caractère de la représentation d'indice I en un élément du groupe symétrique dont la décomposition en cycles est K , c'est-à-dire ayant m_1 points fixes, m_2 cycles de longueur 2, etc. Enfin, le produit intérieur a une expression simple dans la base $\{\psi^K\}$:

$$(1.2) \quad \psi^K \star \psi^H = (\psi^K, \psi^K) \psi^K \text{ ou } 0, \quad \text{selon que } K=H \text{ ou non.}$$

Si I, J sont deux partitions de même poids (le poids $|I|$ est la somme des parts de I , et aussi le degré de S_I), alors :

$$(1.3) \quad S_I \star S_J = \sum_K \chi_I(K) \chi_J(K) \psi^K / (\psi^K, \psi^K).$$

Le produit intérieur se trouve bien correspondre au produit des caractères; on prolonge sa définition en posant $S \star S' = 0$ si S et S' sont deux polynômes homogènes de degrés différents. On trouvera des tables dans [7].

2. IDENTITÉ DE STANLEY. — Soit $\mathbf{K}$ un λ -anneau, $\mathbf{K}[[z]]$ l'anneau des séries formelles en une variable z à coefficients dans $\mathbf{K}$, dont la structure de λ -anneau est définie par $\lambda^j(z) = 0 \quad \forall j \geq 2$. Les fonctions de Schur S_I (respectivement les fonctions de Schur gauches $S_{I/H}$, resp. les fonctions de Newton ψ^k) induisent des *foncteurs de Schur* S_I (resp. *foncteurs de Schur gauches* $S_{I/H}$, resp. des *foncteurs d'Adams* ψ^k). Par $S_I S_J$ (resp. $\psi^h \dots \psi^k$), on entend le foncteur produit $A \in \mathbf{K} \rightarrow S_I(A) S_J(A)$ (resp. $A \rightarrow \psi^h(A) \dots \psi^k(A)$).

Si $A = a + a' + a'' + \dots$ est une somme d'éléments de rang 1 de $\mathbf{K}$, alors les $S_I(A)$ et les $\psi^H(A)$ sont les fonctions symétriques usuelles en $a, a', a'', \dots$

Si A est un $\mathbb{Z}$ -module libre de rang infini, l'anneau $\mathbb{Z}[A, \Lambda^2 A, \Lambda^3 A, \dots]$, que nous noterons $\mathbb{Z}[A]$, est un λ -anneau isomorphe à l'anneau **Sym**; en particulier, c'est un $\mathbb{Z}$ -module libre de base $\{S_I(A)\}$.

Soient $A, B, C \in \mathbf{K}[[z]]$; le développement de $\lambda_{-1}(-ABC)$ s'exprime à l'aide du produit intérieur des foncteurs de Schur :

$$(2.1) \quad \lambda_{-1}(-ABC) = \sum S_I(A) S_J(B) S_I \star S_J(C),$$

somme sur toutes les paires de partitions I, J .

Le cas $C=1$ est dû à Cauchy :

$$(2.2) \quad \lambda_{-1}(-AB) = \sum S_I(A) S_I(B),$$

somme sur toutes les partitions I .

Soit $D \in \mathbf{K}$, et $C = 1 + zD + z^2 D^2 + \dots$; on note $C = 1/(1 - zD)$; C est la classe de l'algèbre tensorielle de $\mathcal{D}$ lorsque D est la classe d'un module $\mathcal{D}$ et que $z=1$. Stanley a obtenu dans [5] l'identité suivante, dont nous indiquons la démonstration.

PROPOSITION. — Soient trois éléments A, B, D de $\mathbf{K}$, et soit $C = zD/(1 - zD)$. Alors :

$$(2.3) \quad \lambda_{-1}(-ABC) = \prod_{k \geq 1} (1 - \psi^k(zD)) \cdot \sum_{I, J, H} S_{I/H}(A) S_{J/H}(B) S_I \star S_J(zD),$$

où I, J, H parcourent l'ensemble des partitions.

Comme $(S_{I/H}, S_K) = (S_I, S_H S_K)$, par développement des deux membres de la formule et identification des coefficients respectifs de $S_I(A) S_J(B)$, il est équivalent de montrer :

$$(2.4) \quad \forall I, J, \quad S_I \star S_J(C) = \prod_{k \geq 1} (1 - \psi^k(zD)) \cdot \sum_H (S_I S_H) \star (S_J S_H)(zD).$$

Cette dernière identité résulte directement des trois lemmes suivants, que l'on obtient en développant toutes les fonctions symétriques en cause dans la base des $\{\psi^k\}$, en utilisant les dérivées partielles par rapport aux ψ^i (toute fonction symétrique S est une fonction des ψ^i , ce qui permet d'écrire $\partial S / \partial \psi^i$, et plus généralement $\partial S / \partial \psi^{ij \dots k} = \partial S / \partial \psi^i \partial \psi^j \dots \partial \psi^k$).

LEMME 1 :

$$(2.5) \quad \sum_H (S_H \psi^K) \star (S_H \psi^L) = 0 \quad \text{ou} \quad \sum_H (\psi^H \psi^K, \psi^H \psi^K) \psi^H \psi^K / (\psi^H, \psi^H),$$

selon que $K \neq L$ ou non.

LEMME 2 :

$$(2.6) \quad (\psi^H \psi^K, \psi^H \psi^K) \psi^H / (\psi^H, \psi^H) = 1^{m_1} 2^{m_2} \dots \partial(\psi^H \psi^K) / \partial \psi^H \quad \text{où} \quad K = 1^{m_1} 2^{m_2} \dots$$

COROLLAIRE :

$$(2.7) \quad \sum_H (S_H \psi^K) \star (S_H \psi^K) = \psi^K 1^{m_1} 2^{m_2} \dots \partial(\sum_H \psi^H) / \partial \psi^K.$$

LEMME 3 :

$$(2.8) \quad \partial \left(\sum_H \psi^H(D) \right) / \partial \psi^K = m_1! m_2! \dots \psi^K (1/1-D) \sum_H \psi^H(D).$$

On remarquera que les égalités :

$$(2.9) \quad \prod_{k \geq 1} (1 - \psi^k(D))^{-1} = \sum_K \psi^K(D) = \sum_H S_H * S_H(D),$$

permettent d'écrire de différentes manières le facteur indépendant de I et J dans (2.3).

3. CARACTÉRISTIQUE D'EULER-POINCARÉ. — Soit $G \xrightarrow{f} X$ un schéma relatif tel que le module cotangent relatif $\Omega_{G/H}$ et que l'homomorphisme (de groupes additifs) $f_* : K(G) \rightarrow K(X)$ soient définis, où $K(G)$ et $K(X)$ sont les anneaux de Grothendieck respectifs des schémas G et X .

Soient D un $\mathbb{Z}$ -module libre, z une variable et K le λ -anneau $\mathbb{Z}[D][[z]]$ des séries formelles en z à coefficients polynomiaux en les $\Lambda^i(D)$. Pour tout élément F de $K(G)$, nous proposons la définition suivante de la caractéristique d'Euler-Poincaré (relative à $D, z, G/X$) :

DÉFINITION. — La caractéristique d'Euler-Poincaré de F est l'élément :

$$(3.1) \quad \chi_{z,D}(F) = f_* [F \cdot \sum (-z)^i \lambda^i(D\Omega_{G/X})],$$

de l'anneau $K \otimes_{\mathbb{Z}} K(K)$.

Le cas où $D = \mathbb{Z}$ est développé par Hirzebruch dans [1] :

$$(3.2) \quad \chi_z(F) = f_* [F \cdot \sum (-z)^i \lambda^i(\Omega_{G/X})].$$

Nous calculons ici la caractéristique d'Euler-Poincaré pour les modules homogènes sur une grassmannienne relative. Soient E un module localement libre sur X de rang n , q un entier $\leq n$, $r = n - q$, et $G_{r,q}(E)$ la grassmannienne des quotients de rang q de E . Si $0 \rightarrow R \rightarrow f^*E \rightarrow Q \rightarrow 0$ est la suite tautologique de modules de cette grassmannienne, alors $\Omega_{G/X} \simeq R \otimes Q^\vee$, où $Q^\vee$ est le dual de Q .

(3.3) THÉORÈME. — Soit $G_{r,q}(E) \rightarrow X$ une grassmannienne, D un $\mathbb{Z}$ -module libre, I et J deux partitions. Alors la caractéristique $\chi_{z,D}(S_I(-zDR)S_J(zDQ^\vee))$ et la série formelle $S_I * S_J(z^2D^2/(1-zD)) \cdot \sum_H S_H * S_H(zD)$ sont égales modulo $z^{\inf(r,q)}$.

Démonstration. — Soient A et B deux $\mathbb{Z}$ -modules libres de rang infini. D'après la formule de Cauchy 2.2, on a :

$$\begin{aligned} \sum (-1)^n \lambda^n(zD(AR - BQ^\vee)) &= \sum (-1)^n \lambda^n(zDAR) \cdot \sum (-1)^n \lambda^n(-zDBQ^\vee) \\ &= \sum S_I(A) S_I(-zDR) \cdot \sum S_J(B) S_J(zDQ^\vee), \end{aligned}$$

tandis que 2.1 donne :

$$\sum_{I,J} S_I * S_J(z^2D^2/(1-zD)) \cdot S_I(A) S_J(B) = \sum (-1)^n \lambda^n(-z^2D^2AB/(1-zD)).$$

Le théorème est donc équivalent à l'égalité :

$$(3.3)' \quad f_* \left(\sum_n (-1)^n \lambda^n [z D(A + Q^\vee)(R - B) + z DAB] \right) \\ = \sum_n (-1)^n \lambda^n (-z^2 D^2 AB / (1 - z D)) \cdot \sum_H S_H * S_H(z D),$$

modulo $z^{\inf(r, q)}$; on pourrait supprimer la restriction sur le degré en z en considérant une grassmannienne $G_{\infty, \infty}(E)$, E étant de rang infini. Multipliant par $\sum (-1)^n \lambda^n (-z DAB)$, on transforme le membre de gauche de 3.3', grâce à 2.1, en $f_*(S_I(A + Q^\vee) S_J(B - R) S_I * S_J(z D))$, c'est-à-dire, par linéarité, en $f_*(\sum S_I(A + Q^\vee) S_J(B - R) S_I * S_J(z D))$. Le théorème de Bott [2], sous la forme $|K|$, $|L| \leq \inf(r, q) \Rightarrow f_*(S_K(-R) S_H(Q^\vee)) = 1$ ou 0 selon que $K = H$ ou non, réduit cette dernière expression à $\sum_{I, J, K} S_{I/K}(A) S_{J/K}(B) S_I * S_J(z D)$ dans laquelle la proposition 2.3 permet de reconnaître $\lambda_{-1}(-z DAB / (1 - z D)) / \prod (1 - \psi^k(z D))$, et finalement, d'après 2.9, $\lambda_{-1}(-z DAB - z^2 D^2 AB / (1 - z D)) \cdot \sum_H S_H * S_H(z D)$. Q.E.D.

REMARQUE 1. — On peut démontrer le théorème directement sans utiliser la proposition 2.3. La récurrence usuelle sur les grassmanniennes réduit le théorème à des propriétés combinatoires de l'espace projectif.

REMARQUE 2. — Le cas spécial où D est trivial de rang 1 conduit à des formules plus simples : tous les $S_i(z)$ sont nuls, sauf $S^n(z) = z^n$ pour $n \geq 0$; en outre, $S_i(zA) = z^{|I|} S_i(A)$ et $S_I * S_J(z) = z^{|I|}$ ou 0 selon que $I = J$ ou non. La formule 2.3 et le théorème 3.3 s'écrivent alors, en simplifiant par $z^{2|I|}$ et en notant $P(z) = \prod_{h \geq 1} (1 - z^h)^{-1}$ la fonction génératrice des partitions :

$$(3.6) \quad \chi_z(S_I(-R) S_J(Q^\vee)) = S_I * S_J(1/(1 - z)) \cdot P(z),$$

$$(3.7) \quad \lambda_{-1}(-z AB / (1 - z)) \cdot P(z) = \sum_{I, H} z^{|I|} S_{I/H}(A) S_{I/H}(B).$$

Stanley [5] obtient les fonctions $S_I * S_J(1/(1 - z))$ en étudiant la représentation adjointe de $SL(n, \mathbb{C})$.

Par ailleurs, si A et B sont deux $\mathbb{Z}$ -modules triviaux de rangs respectifs m et n , la formule 2.3 devient :

$$(3.8) \quad \prod_{h \geq 1} (1 - z^h)^{-mn-1} = P(z)^{mn+1} = \sum_{I, H} z^{|I|} S_{I/H}(m) S_{I/H}(n).$$

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] F. HIRZEBRUCH, *Topological Methods in Algebraic Geometry*, Springer 1956.
- [2] A. LASCoux, *Comptes rendus*, 281, série A, 1975, p. 813 et 851.
- [3] A. LASCoux, in *Combinatoire et représentation du groupe symétrique*, Springer L.N. in Math. 579, 1977.
- [4] I. G. MACDONALD, *Symmetric and Hall Polynomials*, Oxford Math. Mono., 1979.
- [5] R. STANLEY, *The Limiting Behavior of Some Characters of $SL(n, \mathbb{C})$* (prépublication).
- [6] Colloque de Torun 1980, *Astérisque* 87-88, 1981.
- [7] B. G. WYBOURNE, *Symmetry Principle in Atomic Spectroscopy*, Wiley, 1970.

Laboratoire d'Informatique théorique et Programmation, L.A. n° 248,
Université Paris-VII, 2, place Jussieu, 75005 Paris.