

GÉOMÉTRIE ALGÈBRE. — Fonctions de Schur et grassmanniennes.

Note (*) de M. Alain Lascoux, présentée par M. Henri Cartan.

Nous illustrons par quelques formules les liens étroits existant entre la structure des grassmanniennes et les polynômes symétriques dits de Schur.

Il est bien connu que les propriétés des variétés drapeaux procèdent formellement par induction de celles du projectif. La difficulté apparaît lorsque l'on cherche des relations explicites entre différents invariants cohomologiques; la longueur des calculs pour la cohomologie des fibrés inversibles en témoigne [cf. (7)].

Nous présentons ici une simplification apportée par l'emploi de fonctions symétriques appropriées, les fonctions de Schur. Ainsi peut-on calculer les $H^{**}(F)$ pour tout fibré « tensoriel » sur la grassmannienne, ou les coefficients d'intersection des cycles de Schubert [cf. (3)]. Dans cette Note et la suivante, nous donnons quelques formules dont la démonstration se réduit à des décompositions naturelles de Fonctions de Schur.

1. FONCTIONS DE SCHUR. — 1.1. *Représentations*. — Soit q un entier. Une partition I d'un entier $|I|$ en q parts au plus est une suite finie d'entiers $0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_q$ de somme $|I|$. On a une involution, l'adjonction $\sim$ sur l'ensemble des partitions [cf. (4)]. A toute partition I est associée une représentation V_I (irréductible en caractéristique 0) du groupe linéaire $Gl\ q$ (5) et donc, étant donné un fibré vectoriel Q de rang q , un fibré « tensoriel » : $T_I(Q) = Q \times^{Gl\ q} V_I$. $T_{0 \dots 0 i}(Q)$ est la i -ième puissance symétrique de Q et $T_{0 \dots 0 1 \dots 1}(Q)$ sa i -ième puissance extérieure (notée $\Lambda^i Q$); la puissance extérieure maximale est notée $\det(Q)$.

1.2. *Classes dans l'anneau de Grothendieck* K' . — Si $o^i(Q)$ est la classe de $T_{0 \dots 0 i}(Q)$, la classe de $T_I(Q)$ est le déterminant

$$\begin{vmatrix} o^{i_1}(Q) & o^{i_2+1}(Q) & \dots & o^{i_q+q-1}(Q) \\ o^{i_1-1}(Q) & o^{i_2}(Q) & \dots & \dots\dots\dots \\ \vdots & \vdots & \dots & o^{i_q}(Q) \end{vmatrix},$$

où $o^i(Q) = 0$ si $i < 0$ [cf. (2)].

L'opération o^i s'étendant à K' , on définit alors pour tout $x \in K'$, pour tout q -uple d'entiers de $\mathbb{Z}$ non nécessairement ordonnés, $T_I(x)$ dans K' à l'aide de ce déterminant. Nous noterons par la même lettre un fibré et sa classe dans K' .

1.3. *Fonctions de Schur*. — Soient I une partition, u un élément diagonal de $Gl\ q$, de valeurs propres $a, b, \dots$, $T_I(u)$ l'image de u par la représentation associée à I . Alors la trace de $T_I(u)$ est un polynôme symétrique en $a, b, \dots$ dit *polynôme de Schur* et noté $t_I(a, b, \dots)$. Ainsi, $t_{0 \dots 0 i}$ est le polynôme symétrique élémentaire homogène (somme de tous les monômes de degré total i) et $t_{0 \dots 0 1 \dots 1}$ le polynôme élémentaire dit de « Newton ».

On a $t_I(1, \dots, 1) = \text{rang de } T_I(Q)$, et si Q est une somme de fibrés inversibles $A, B, \dots$, alors la classe de $T_I(Q)$ dans K' est égale à $t_I(A, B, \dots)$.

1.4. *Fonctions spéciales.* — Quand on prend pour variables les puissances successives d'une même variable, $\{a, b, \dots\} = \{z^0, z^1, \dots, z^{q-1}\}$, les fonctions de Schur en ces variables peuvent être calculées comme quotients de deux déterminants de Van der Monde et s'interprètent comme « fonctions génératrices » [cf. (4)]. En particulier, $t_{0\dots 0i}(1, z, \dots, z^{q-1})$ est le polynôme de Gauss $(1-z^q) \dots (1-z^{q+i-1})/(1-z) \dots (1-z^i)$ noté $\begin{bmatrix} q+i-1 \\ i \end{bmatrix}_z$.

1.5. *Grassmanniennes.* — Soit $\mathbf{E}$ un fibré vectoriel de rang e sur une base S . $G_q(\mathbf{E})$ est la grassmannienne des q -quotients de $\mathbf{E}$, de projection π sur S , qui induit $\pi_* : K^*(G) \rightarrow K^*(S)$, et $0 \rightarrow \mathbf{R} \rightarrow \pi^* \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{Q} \rightarrow 0$ la suite exacte « tautologique » sur G , de fibrés de rangs respectifs r, e, q .

La formule de projection classique [cf. (2)] s'écrit, dans $K^*(S)$:

PROPOSITION. — Pour toute partition I en q parts au plus,

$$\pi_* T_I(\mathbf{Q}) = T_I(\mathbf{E}).$$

Comme les $T_I(\mathbf{Q})$, pour $i_q \leq r$, forment une $K^*(S)$ -base de $K^*(G)$, le morphisme π_* est donc déterminé (on n'oublie pas que $T_I(\mathbf{Q}) = 0$ pour un fibré de rang q et une partition I en plus de q parts); il n'est malheureusement pas toujours simple d'exprimer la classe d'un fibré dans cette base. C'est le but du paragraphe suivant.

2. DÉCOMPOSITION DANS UNE BASE

2.1. THÉORÈME. — Pour tout couple de partitions $(i_1, \dots, i_r) = I$ et $(j_1, \dots, j_q) = J$, et tout entier m suffisamment grand, alors

$$\pi_* [T_I(\mathbf{R}) T_J(\mathbf{Q}^*)] = \det^{-m}(\mathbf{E}) T_{m+i_1, \dots, m+i_r, m-j_q, \dots, m-j_1}(\mathbf{E}) \quad \text{dans } K^*(S).$$

Nous noterons le deuxième membre $\det^{-m}(\mathbf{E}) T_{m^r \times 1, m^q/J}(\mathbf{E})$.

Rappelons que pour un fibré $\mathbf{F}$ de rang f et son dual $\mathbf{F}^*$, on a :

(i) pour toute partition $J = (j_1, \dots, j_f)$ et tout $m \geq j_f$:

$$\det^m(\mathbf{F}) T_J(\mathbf{F}^*) = T_{m^f/J}(\mathbf{F}).$$

(ii) pour $m \geq 0$,

$$\det^m(\mathbf{F}) T_J(\mathbf{F}) = T_{m^f \times J}(\mathbf{F});$$

Comme $\det(\mathbf{E}) = \det(\mathbf{R}) \det(\mathbf{Q})$, le théorème est donc équivalent à :

THÉORÈME. — Pour tout couple de partitions I et J ,

$$\pi_* [T_I(\mathbf{R}) T_J(\mathbf{Q})] = T_{i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_q}(\mathbf{E}) \quad \text{noté } T_{I,J}(\mathbf{E}).$$

Cette dernière forme découle de la proposition 1.5, après le remplacement de $\mathbf{R}$ par $\mathbf{E}-\mathbf{Q}$; on a alors un calcul de développement de déterminants.

Remarque. — On a en fait un théorème plus fort : tous les $\mathcal{R}^n \pi_* [T_I(\mathbf{R}) T_J(\mathbf{Q}^*)]$ sont nuls sauf au plus un, qui est un $T_{II}(\mathbf{E})$.

2.2. COROLLAIRE. — Soient deux partitions I et J telles que $i_r \leq q$ et $j_q \leq r$; alors :

$$\pi_*[T_I(\mathbf{R})T_J(\mathbf{Q}^*)] = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad I \neq \tilde{J}$$

et

$$\pi_*[T_I(\mathbf{R})T_{\tilde{I}}(\mathbf{Q}^*)] = (-1)^{|I|}.$$

En effet, la première ligne du déterminant $T_{m^r \times l, m^q/J}$ est $o^{m+i_1}, \dots, o^{m+i_r+r-1}, o^{m+r-j_q}, \dots, o^{m+r+q-1-j_1}$; les exposants sont e entiers compris entre m et $m+e-1$. I étant fixé, il existe donc un seul J pour lequel le déterminant n'a pas deux colonnes identiques, et l'on vérifie que c'est pour $J = \tilde{I}$.

2.3. COROLLAIRE [décomposition dans les bases $T_I(\mathbf{R})$ ou $T_I(\mathbf{Q}^*)$]. — Tout élément x de $K'(G)$ s'écrit :

$$x = \sum_I (-1)^{|I|} \pi^* \pi_* [x T_I(\mathbf{R})] T_{\tilde{I}}(\mathbf{Q}^*), \quad I \text{ tel que } i_r \leq q;$$

$$x = \sum_I (-1)^{|I|} \pi^* \pi_* [x T_{\tilde{I}}(\mathbf{Q}^*) T_I(\mathbf{R})], \quad I \text{ tel que } i_r \leq q.$$

En effet, les deux formules sont $K'(S)$ -linéaires; il suffit donc de les vérifier pour les éléments d'une base : dans le premier cas, la base $T_I(\mathbf{Q}^*)$; dans le second, la base $T_I(\mathbf{R})$.

Il est à noter que l'isomorphisme entre les grassmanniennes $G_q(\mathbf{E})$ et $G_r(\mathbf{E}^*)$ échange les fibrés $\mathbf{R}$ et $\mathbf{Q}^*$, i. e. la suite exacte « tautologique » sur $G_r(\mathbf{E}^*)$ est $0 \rightarrow \mathbf{Q}^* \rightarrow \pi^* \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{R}^* \rightarrow 0$.

(*) Séance du 6 octobre 1975.

(¹) EHRESMANN, *Ann. Maths*, 35, 1934, p. 396-443.

(²) LASCoux, *Bull. Soc. Math. Fr.*, 102, 1974, p. 161-179.

(³) LASCoux, *Comptes rendus*, 279, série A, 1974, p. 201.

(⁴) LASCoux, *Tableaux de Young (Séminaire Pîsot, novembre 1974, Paris, M. Belgodère éd., 1975)*.

(⁵) SCHUR, *Œuvres complètes*, I, Springer-Verlag, 1973.

(⁶) SGA VI, *Théorie des Intersections (Lect. Notes, n° 225, Springer-Verlag, 1971)*.

(⁷) SVANES, *Adv. Maths*, 14, 1974, p. 369-453.

Département de Mathématiques,
Université Paris VII,
Tour 45-55,
2, place Jussieu,
75221 Paris Cedex 05.

GÉOMÉTRIE ALGÈBRE. — *Fonctions de Schur et grassmanniennes.*Note (*) de M. **Alain Lascoux**, présentée par M. Henri Cartan.

Poursuivant l'étude des grassmanniennes à l'aide des fonctions de Schur [cf. une Note précédente ⁽¹⁾], nous donnons ici la caractéristique d'Euler-Poincaré des fibrés tensoriels « tautologiques ».

Cette Note fait suite à la Note ⁽¹⁾ dont elle reprend les notations et dont elle illustre le théorème 2.1. L'emploi des fonctions de Schur et la méthode de récurrence exposée en 4.1 sont la source de nombreuses formules dont nous donnons ici quelques exemples.

Si Ω^n est le fibré sur $G_q(E)$ dont les sections sont les n -formes différentielles relatives sur S , et si F est un fibré sur G , on cherche à déterminer les $\mathcal{R}^m \pi_* (F \otimes \Omega^n) = \mathcal{R}^{n,m} \pi_* (F)$ dans $K^*(S)$.

Pour les fibrés « tensoriels » tautologiques, ce problème peut se résoudre (nous renvoyons à notre thèse). Contentons-nous ici du calcul plus simple de la somme alternée $\sum (-1)^m \mathcal{R}^{n,m}$.

En d'autres termes : soient une grassmannienne $G_q(E)$ et l'élément de

$$K^*(G)(z) : \quad \lambda_{-z} \Omega = \sum (-z)^n \Omega^n;$$

on cherche à calculer, pour toute partition I , $\pi_* T_I(\mathbf{R}) \lambda_{-z} \Omega$.

3.1. La *formule de Cauchy* [cf. ⁽⁹⁾] pour les fonctions symétriques [qui donne une des deux familles de polynômes symétriques qui servent à définir les λ -anneaux « spéciaux », cf. ⁽⁶⁾] se traduit par, étant donné que $\Omega^1 \simeq \mathbf{R} \otimes \mathbf{Q}^*$:

$$\Omega^n \simeq \bigoplus_{|J|=n} T_{J^*}(\mathbf{R}) \otimes T_J(\mathbf{Q}^*).$$

Comme $T_I(\mathbf{R}) \otimes T_L(\mathbf{R}) \simeq \bigotimes \left[\begin{smallmatrix} K \\ I, L \end{smallmatrix} \right] T_K(\mathbf{R})$, avec des coefficients entiers ≥ 0 qui sont aussi ceux de l'intersection des cycles de Schubert [cf. ⁽³⁾], le théorème 2.1 nous donne :

THÉORÈME. — *Pour toute partition I en r parts au plus,*

$$\pi_* [T_I(\mathbf{R}) \lambda_{-z} \Omega] = \sum_{J, K} (-z)^{|J|} \left[\begin{smallmatrix} K \\ I, J^* \end{smallmatrix} \right] T_{K, 0q/J}(\mathbf{E}).$$

En fait, cette sommation sur toutes les partitions J, K , avec $j_q \leq r$, comporte de nombreux termes nuls ou qui se compensent deux à deux.

3.2. *Exemple.* — Soit une partition « colonne » $I = (0, \dots, 0, 1, \dots, 1)$, de l'entier n et soit $L = J^*$. Dans ce cas, les coefficients d'intersection sont 0 ou 1 (formule de Pieri) :

$$T_I(\mathbf{R}) \otimes T_L(\mathbf{R}) = \sum_K T_K(\mathbf{R}),$$

somme sur toutes les partitions telles que

$$|K| = n + |L| \quad \text{et} \quad k_i - l_i = 1 \text{ ou } 0, \quad \forall i.$$

L'ensemble $\{l_1, l_2+1, \dots, l_r+r-1, r-j_q, \dots, r+q-1-j_1\}$ est une permutation de $\{0, \dots, e-1\}$, et donc $\{k_1, \dots, k_r+r-1, r-j_q, \dots, r+q-1-j_1\}$, s'il n'y a pas de nombres répétés, une permutation de

$$\{0, \dots, e-n-1, e-n+1, \dots, e\}.$$

Cela entraîne, pour L et K, les égalités :

$$k_r = l_r + 1 = \dots = k_{r-n+1} = l_{r-n+1} + 1 = q + 1.$$

Les conditions sur L sont équivalentes à $j_1 \geq n$ et chaque J de cette forme fournit un terme et un seul $(-z)^{|J|} T_1(E)$.

En résumé, $T_1(R)$ étant noté usuellement $\Lambda^n R$:

PROPOSITION [corollaire du théorème 4.2 de ⁽¹⁰⁾] :

$$\pi_* [\Lambda^n R \lambda_{-z} \Omega] = z^{qn} \begin{bmatrix} e-n \\ q \end{bmatrix}_z \Lambda^n E.$$

3.3. On peut montrer, plus généralement, que pour des partitions de la forme $I = (\dots, 0, 1, \dots, 1, m+1)$ de $n = |I|$, notées $n-m\delta m$, qui correspondent aux fibrés Z_{n-m+1}^n de Bott obtenus dans l'étude du projectif (cf. ⁽⁸⁾), on a

$$\begin{aligned} \pi_* [T_{n-m\delta m}(R) \lambda_{-z} \Omega] &= z^{q(n-m)} \begin{bmatrix} e-(n-m) \\ q \end{bmatrix}_z T_{n-m\delta m}(E) \\ &\quad - z^{(q-1)(n-m)} \begin{bmatrix} n-m \\ 1 \end{bmatrix}_z \begin{bmatrix} e-(n-m)-1 \\ q-1 \end{bmatrix}_z T_{n-m+1\delta m-1}[E] \\ &\quad + z^{(q-2)(n-m)} \begin{bmatrix} n-m+1 \\ 2 \end{bmatrix}_z \begin{bmatrix} e-(n-m)-2 \\ q-2 \end{bmatrix}_z T_{n-m+2\delta m-2}[E] - \dots \end{aligned}$$

3.4. COROLLAIRE DU THÉORÈME 3.1 :

PROPOSITION [cf. ⁽¹⁾]. — Le polynôme de Poincaré de la grassmannienne est égal à $\begin{bmatrix} e \\ q \end{bmatrix}_z$.

Par définition, le polynôme de Poincaré est $\sum (-z)^{m+n} \dim H^{n,m}[\mathcal{O}_G]$ pour le fibré trivial de rang 1. Dans l'anneau de Grothendieck $K^*(S)$, c'est donc

$$\pi_* \lambda_{-z} \Omega = \sum_J z^{|J|} = \begin{bmatrix} e \\ q \end{bmatrix}_z,$$

la dernière égalité résultant de l'interprétation des polynômes de Gauss comme fonctions génératrices de partitions [cf. ⁽⁴⁾].

Le théorème 3.1 conduit donc à des problèmes de nature « combinatoire » qui fournissent des coefficients du type 1.4. Nous ne développerons pas ce point de vue ici ; portons plutôt notre effort, suivant le principe qui nous a guidé jusqu'ici, sur le choix d'une base plus appropriée au calcul de $\pi_* [x \lambda_{-z} \Omega]$.

4. UNE NOUVELLE BASE DE $K^*(G)$. — Soit z la classe d'un fibré inversible dans $K^*(S)$. Les $T_1[R(z-1)]$ se développent en fonction des $T_j(R)$, et pour un ordre approprié sur les partitions (ordre lexicographique par le bas, suivi de la transposition $\sim$), la matrice

de passage est triangulaire, formée de 1 dans la diagonale. Les $T_i[\mathbf{R}(z-1)]$, pour $i \leq q$, sont donc une $K^*(S)$ -base de $K^*(G)$, et l'on a, pour cette base, un théorème que nous n'énonçons pas ici dans toute sa généralité :

4.1. THÉORÈME. — Soit une partition $\mathbf{I}$ telle que $\exists m$:

$$i_1 = \dots = i_{r-m} = 0, \quad i_{r-m+1} \geq m;$$

alors, on a dans $K^*[S]$:

$$\pi_*[T_{\mathbf{I}}\mathbf{R}(z-1)\lambda_{-z}\Omega] = z^{qm} \begin{bmatrix} e-m \\ q \end{bmatrix}_z T_{\mathbf{I}}[\mathbf{E}(z-1)].$$

La démonstration se fait par récurrence sur l'entier q , à l'aide d'un diagramme que l'on a souvent l'occasion d'utiliser [cf. (2)] : si $G_{q,q-1}(\mathbf{E})$ est la variété drapeau des quotients successifs de rang q et $q-1$, alors on a le carré cartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc} & G_{q,q-1} & \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\ G_{q-1} & & G_q \\ \pi_3 \swarrow & & \searrow \pi_4 \\ & S & \end{array}$$

et π_1, π_3 sont des morphismes de projection de projectifs.

On suppose donc que la propriété est vraie pour π_1, π_2, π_3 . Comme $\Omega_3 + \Omega_4 \simeq \Omega_1 + \Omega_2$ est le fibré cotangent à $G_{q,q-1}(\mathbf{E})/S$, et que

$$\lambda_{-z}(\Omega_1 + \Omega_2) = \lambda_{-z}\Omega_1 \cdot \lambda_{-z}\Omega_2,$$

il suffit d'écrire que $\pi_{3*}\lambda_{-z}\Omega_3 = \begin{bmatrix} q \\ 1 \end{bmatrix}_z$ et donc

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} q \\ 1 \end{bmatrix}_z \pi_{4*} T_{\mathbf{I}}(\mathbf{R}(z-1)) \lambda_{-z}\Omega_4 &= \pi_{2*} \pi_{1*} \pi_3^* [T_{\mathbf{I}}(\mathbf{R}(z-1)) \lambda_{-z}\Omega_1 \lambda_{-z}\Omega_2] \\ &= z^m \begin{bmatrix} r+1-m \\ 1 \end{bmatrix}_z z^{m(q-1)} \begin{bmatrix} e-m \\ q-1 \end{bmatrix}_z T_{\mathbf{I}}(\mathbf{E}(z-1)). \end{aligned}$$

4.2. Il reste donc à vérifier la formule pour le projectif, et c'est là que l'on voit apparaître l'hypothèse sur $\mathbf{I}$.

On passe des $T_{\mathbf{I}}(\mathbf{R}(z-1))$ aux $T_{\mathbf{I}}(\mathbf{R})$ grâce à la formule de Cauchy (3.1) :

$$o^n(\mathbf{R}(z-1)) = \sum_{|\mathbf{I}|=n} T_{\mathbf{I}}(\mathbf{R}) T_{\mathbf{I}}(z-1)$$

et cette somme se limite aux seules partitions de la forme 3.3 : $n-m \delta m$, car l'on a $T_{n-m\delta m}(z-1) = z^m(z-1)$, $T_{\mathbf{I}}(z-1) = 0$ autrement.

4.3. CAS SPÉCIAL. — Soit, dans $K^*(S)$, $\mathbf{E} = 1 + z + z^2 + \dots + z^{e-1}$, où z est la classe d'un fibré inversible; alors

THÉORÈME. — Pour tout $\mathbf{I}$:

$$\pi_*[T_{\mathbf{I}}(\mathbf{R})\lambda_{-z}\Omega] = \begin{bmatrix} e \\ q \end{bmatrix}_z t_{\mathbf{I}}(z^q, \dots, z^{e-1}).$$

Le diagramme 4.1 permet la récurrence sur q : on a à calculer

$$1/\begin{bmatrix} q \\ 1 \end{bmatrix}_z \cdot \pi_{2*} \pi_{1*} [T_1(\mathbf{R}) \lambda_{-z} \Omega_1 \lambda_{-z} \Omega_2],$$

ce qui nécessite uniquement une soustraction de lignes dans un déterminant, une fois que l'on a écrit la projection π_{1*} sous la forme suivante :

LEMME. — Soit un projectif $G_1(\mathbf{E})$; alors pour toute partition $\mathbf{I}$ en $r = e-1$ parts au plus, on a

$$\pi_* [T_1(\mathbf{R}) \lambda_{-z} \Omega] = \begin{bmatrix} o^{i_1}(\mathbf{E}) & \dots & o^{i_r+r-1}(\mathbf{E}) & o^r(\mathbf{E}(1-z)/(1-z)) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & o^{i_r}(\mathbf{E}) & \mathbf{E}(1-z)/(1-z) \\ o^{i_1-r}(\mathbf{E}) & \dots & o^{i_r-1}(\mathbf{E}) & \begin{bmatrix} e \\ 1 \end{bmatrix}_z \end{bmatrix}.$$

Remarque. — Si le fibré $\mathbf{E}$ est trivial (on peut prendre $z = 1$), le théorème est bien clair : $\lambda_{-1} \Omega$ est le faisceau structural de $\begin{pmatrix} e \\ q \end{pmatrix}$ fois une section triviale de $G_q(\mathbf{E})$, sur laquelle $\mathbf{R}$ est trivial, et donc $T_1(\mathbf{R}) = t_1(1, \dots, 1)$.

Il serait intéressant de trouver une interprétation géométrique dans le cas où z est quelconque.

Le théorème 4.3 fournit une vérification de la valeur des coefficients trouvés en 3.1; ainsi pour l'exemple 3.2 :

$$\begin{aligned} z^{qn} \begin{bmatrix} e-n \\ q \end{bmatrix}_z t_1(1, \dots, z^{e-1}) &= z^{qn} \begin{bmatrix} e-n \\ q \end{bmatrix}_z z^{n(n-1)/2} \begin{bmatrix} e \\ n \end{bmatrix}_z \\ &= \begin{bmatrix} e \\ q \end{bmatrix}_z t_1(z^q, \dots, z^{e-1}) = \begin{bmatrix} e \\ q \end{bmatrix}_z z^{n(q+(n-1)/2)} \begin{bmatrix} e-q \\ n \end{bmatrix}_z \end{aligned}$$

(*) Séance du 13 octobre 1975.

(¹) à (⁷), références citées en (¹¹).

(⁸) BOTT, *Ann. Maths*, 66, 1957, p. 203-248.

(⁹) CAUCHY, *Œuvres complètes*, 2^e série, XII, p. 183-201 (*Mémoire sur les sommes alternées...*).

(¹⁰) LE POTIER, *Thèse*, Poitiers, 1974.

(¹¹) A. LASCoux, *Comptes rendus*, 281, série A, 1975, p. 813.

Département de Mathématiques,
Université Paris VII,
Tour 45-55,
2, place Jussieu,
75221 Paris Cedex 05.