

[illegible]

Abstract. The space of polynomials in one variable  $x$  of odd degree  $2n+1$  is  $2n+2$ -dimensional. A linear combination of  $n+1$  polynomials  $(x-\beta)^{2n+1}$  takes care of the required number of parameters. Such an expression has been called the canonical form of a binary form. Sylvester has shown that this reduction is obtained through another polynomial, the catalecticant, when it has the taste of having all its roots distinct. It happens, and this is not by coincidence, that the catalecticant is an orthogonal polynomial for a certain linear functional associated to the polynomial; the required relations are given by the theory of symmetric functions, supplemented by a little amount of divided differences and Lagrange interpolation formula. Having recovered with these tools the classical case, one can go further and treat as well the case where all the roots of the catalecticant are the same; this is what we do in Theorem 3.4.

## 1. FONCTIONS SYMETRIQUES .

Etant donnés deux ensembles finis  $A, B$  d'indéterminées (dits alphabets), on note  $S_i(A-B)$  les coefficients de la série rationnelle de pôles  $A$  et zéros  $B$  :

$$(1.1) \quad \sum z^j S_j(A-B) = \prod_{b \in B} (1-zb) / \prod_{a \in A} (1-za)$$

Le polynôme dont les racines sont  $B$  s'écrit ainsi  $S_n(x-B)$ , avec  $n = \text{card}(B)$  : c'est le cas où  $A$  est de cardinal 1,  $A = \{x\}$ . Il est clair que

$$\prod_{b \in B} (1-zb) / (1-zx) = 1 + \dots + z^{n-1} S_{n-1}(x-B) + z^n S_n(x-B) / (1-zx), \text{ et donc,}$$

$$(1.2) \quad \text{pour tout } j \geq 0, \quad S_{n+j}(x-B) = x^j S_n(x-B) \quad .$$

La séparation du numérateur et du dénominateur de la série (1.1) obtenue en posant successivement  $A = \emptyset$ , puis  $B = \emptyset$ , donne

$$(1.3) \quad S_i(A-B) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} S_{i-j}(A) \cdot S_j(-B)$$

la sommation étant en fait limitée à un nombre fini de termes, puisque pour tout  $k > 0$ ,  $S_{-k}(\cdot) = 0$ . En particulier,

$$(1.4) \quad \Pi_{b \in B}(x-b) = S_n(x-B) = x^n S_0(-B) + x^{n-1} S_1(-B) + x^{n-2} S_2(-B) + \dots$$

et donc les  $S_j(-B)$  sont les coefficients du polynôme  $S_n(x-B)$  pour  $0 \leq j \leq n$  et sont nuls pour  $j > n$ .

On n'impose pas que les éléments de  $A$  et  $B$  soient distincts. Par exemple, si tous les  $b \in B$  sont égaux (on écrit  $B = nb$ ), on a  $S_n(x - nb) = (x - b)^n$ . Par spécialisation  $b = 1$ , i.e.  $B = \{1, \dots, 1\}$ , on obtient

$$(1.5) \quad S_j(-n) = (-1)^j \binom{n}{j} \quad \text{et} \quad S_j(n) = \binom{n+j-1}{j}.$$

Si  $A$  est un sous-alphabet de  $B$  de cardinal  $m$ , on a

$$(1.6) \quad S_n(x-B) / S_m(x-A) = S_{n-m}(x-(B-A))$$

qui est bien égal à  $S_{n-m}((x+A)-B)$ , où  $x+A$  désigne l'alphabet  $\{x\} \cup A$ . Dans les  $\lambda$ -anneaux, on n'éprouve aucune réticence à additionner, soustraire ou multiplier par des réels des alphabets; ces anneaux sont le cadre approprié aux manipulations de fonctions symétriques plus élaborées que dans ce texte.

Les présentes notations permettent d'écrire de manière condensée certaines identités binomiales. Ainsi nous aurons besoin de l'identité suivante dont on nous épargnera la vérification qui ne fait que combiner (1.3) et (1.5).

(1.7) LEMME. Soient  $j, k, n$  des entiers  $\geq 0$ ,  $x$  et  $y$  deux indéterminées. Alors  $S_{k+l+j}(ny - (n+k)x) = y^{j+l-n} (y-x)^{k+l} S_{n-l}((2+k+j)y - jx)$ .

Il existe une autre manière d'écrire les polynômes, en faisant apparaître les coefficients binomiaux. Si  $n$  est un entier,  $E$  un alphabet,  $x$  une indéterminée, on a d'après (1.3) et (1.5) :

$$(1.8) \quad S_n(E - nx) = S_n(E) - \binom{n}{1} x S_{n-1}(E) + \binom{n}{2} x^2 S_{n-2}(E) - \dots + \binom{n}{n} x^n S_0(E)$$

puisque  $S_j(-nx) = (-x)^j \binom{n}{j}$ .

Les dérivées successives de  $S_n(E - nx)$  s'écrivent commodément :

$$(1.9) \quad \frac{d}{dx}^p S_n(E - nx) = n(n-1)\dots(n-p+1) S_{n-p}(E - (n-p)x).$$

Les fonctions symétriques fondamentales sont les fonctions de Schur [Macdonald].

(1.10) DEFINITION. Soient  $p$  un entier,  $H \in \mathbb{Z}^p$ ,  $A_1, B_1, \dots, A_p, B_p$  des alphabets. Alors la fonction de Schur  $S_H(A_1 - B_1, \dots, A_p - B_p)$  est le déterminant

$$\left| S_{h_j + j - i}(A_j - B_j) \right|_{1 \leq i, j \leq p}.$$

On réserve parfois le nom de Schur au cas spécial  $A_1 = \dots = A_p = A$ ,  $B_1 = \dots = B_p = \emptyset$ , pour lequel on simplifie la notation en se contentant de  $S_H(A)$ .

La théorie algébrique des polynômes orthogonaux ou des déterminants de Hankel peut s'interpréter comme l'étude du cas des partitions  $H$  rectangles, i.e.  $H = (q, \dots, q) \in \mathbb{N}^p$ . Soient en effet  $E$  un alphabet (de cardinal infini!),  $\pi$  la fonctionnelle (notée à droite) :  $\forall n \geq 0, x^n \pi = S_n(E)$ . Alors [Brezinski] :

(1.11) PROPOSITION.  $P_n(x) = S_n(E-x) = S_{n0}(E, \dots, E, x)$  est le n-ième polynôme orthogonal pour la fonctionnelle  $\pi$ .

Remarque. On passe de  $S_{n \dots n0}(E, \dots, E, x)$  à  $S_{n \dots n}(E-x)$  en multipliant le premier déterminant, à gauche, par  $|S_{j-i}(-x)|$ . Ainsi,

$$\begin{vmatrix} 1 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} S_3(E) & S_4(E) & S_5(E) & x^3 \\ S_2(E) & S_3(E) & S_4(E) & x^2 \\ S_1(E) & S_2(E) & S_3(E) & x \\ S_0(E) & S_1(E) & S_2(E) & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S_3(E-x) & S_4(E-x) & S_5(E-x) & 0 \\ S_2(E-x) & S_3(E-x) & S_4(E-x) & 0 \\ S_1(E-x) & S_2(E-x) & S_3(E-x) & 0 \\ S_0(E) & S_1(E) & S_2(E) & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} S_3(E) - xS_2(E) & S_4(E) - xS_3(E) & S_5(E) - xS_4(E) \\ S_2(E) - xS_1(E) & S_3(E) - xS_2(E) & S_4(E) - xS_3(E) \\ S_1(E) - xS_0(E) & S_2(E) - xS_1(E) & S_3(E) - xS_2(E) \end{vmatrix} \quad . \text{ La première forme se}$$

prête plus facilement aux calculs faisant intervenir la fonctionnelle. Ainsi

$S_{3330}(E, E, E, x) \pi = S_{3330}(E)$  ( $= 0$  puisque première et dernière colonne sont identiques). La deuxième forme est due à [Cayley].

Développant  $S_n(E, \dots, E, x)$  suivant sa dernière colonne, on obtient

$S_n(E-x) = \sum_{j=0}^n (-x)^j S_{(n-1)j}^{n-j}(E)$ , et donc, si  $B$  est l'ensemble des racines du polynôme  $S_n(E-x)$ , on a les relations suivantes, pour  $0 \leq j \leq n$ :

$$(1.12) \quad S_{(n-1)j}^{n-j}(E) / S_{(n-1)n}^{n-j}(E) = (-1)^{n-j} S_{n-j}(-B) \quad .$$

Développant  $S_{n0}(E)$ , ...,  $S_{nn-1}(E)$  suivant leurs dernières colonnes, et utilisant la nullité de tous ces déterminants (qui ont chacun deux colonnes répétées) on transforme les relations (1.12) en les suivantes:

$$(1.13) \quad S_n(E-B) = 0 = \dots = S_{2n-1}(E-B) \quad .$$

## 2. DIFFERENCES DIVISEES .

Si  $f(x, y, z, \dots)$  est un polynôme, la différence  $f(x, y, z, \dots) - f(y, x, z, \dots)$  est divisible par  $x - y$ . L'opérateur, noté à droite,

$$(2.1) \quad f(x, y, z, \dots) \longrightarrow \frac{f(x, y, z, \dots) - f(y, x, z, \dots)}{x - y} = f \partial_{xy}$$

est dit différence divisée. On peut composer de tels opérateurs; les propriétés de l'algèbre des différences divisées sont très liées à celles du groupe symétrique (cf. [L&S1]). Soit  $B = \{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n\}$  un alphabet totalement ordonné. On note  $\partial_B$  le produit  $\partial_{\beta_0 \beta_1} \partial_{\beta_1 \beta_2} \dots \partial_{\beta_{n-1} \beta_n}$ . Si  $f$  est une fonction

d'une variable,  $f \partial_B$  désigne l'image de  $f(\beta_0)$  par l'opérateur  $\partial_B$ , en considérant  $f(\beta_0)$  comme une fonction en  $B$  de degré nul en  $\beta_1, \dots, \beta_n$ .

(2.2) LEMME. Soient  $B, E, F$  trois alphabets indépendants,  $B$  étant de card.  $n$ ,  $j$  un entier :  $0 \leq j \leq n$ . Alors, pour tout  $k \geq 0$ ,

$$\beta_0^j S_k(\beta_0 + E - F) \partial_B = S_{k+j-n}(B + E - F).$$

Démonstration. Tout d'abord,  $\beta_0^j S_k(\beta_0 + E - F) = S_{k+j}(\beta_0 + E - F) - \beta_0^{j-1} S_{k+1}(E - F) - \dots - \beta_0^0 S_{k+j}(E - F)$ . La série  $\sum z^h S_h(\beta_0 + E - F) = \sum z^h S_h(E - F) / (1 - z\beta_0)$  a pour image par  $\partial_{\beta_0 \beta_1}$   $z \sum z^h S_h(E - F) / (1 - z\beta_0) (1 - z\beta_1) = z \sum z^h S_h(\beta_0 + E - F) / (1 - z\beta_1)$  et donc par itération,  $\sum z^h S_h(\beta_0 + E - F) \partial_B = z^n \sum z^h S_h(B + E - F)$ . On conclut en remarquant que l'image par  $\partial_B$  de  $\beta_0^{j-1} S_{k+1}(E - F) + \dots + \beta_0^0 S_{k+j}(E - F)$ , étant un polynôme en  $B$  de degré  $j-1-n$ , est nulle puisque  $j \leq n$ .  $\square$

L'opérateur  $\partial_B$  fournit le reste dans les formules d'interpolation classiques de fonctions d'une variable. On considère usuellement que  $\beta_0, \dots, \beta_{n-1}$  sont les points d'interpolation, et que  $\beta_n = x$  est le point où l'on veut "approximer".

(2.3) PROPOSITION (Formule de Lagrange, cf [L&S2]). Soient  $B$  un alphabet de cardinal  $n+1$ ,  $f$  une fonction d'une variable à coefficients symétriques en  $B$ . Alors  $\sum_{\beta \in B} f(\beta) / S_n(2\beta - B) = f \partial_B$ .

L'expression  $S_n(2\beta - B)$  n'est qu'une manière condensée d'écrire  $\prod_{\beta' \in B - \{\beta\}} (\beta - \beta')$ .

### 3. FORME CANONIQUE

(3.1) THEOREME [Sylvester]. Soient  $S_{2n+1}(E - (2n+1)x)$  un polynôme de degré impair,  $B = \{\beta\}$  l'ensemble des racines supposées toutes distinctes du catalectisant  $S_{(n+1)n+1}(E - x)$ . Alors  $S_{2n+1}(E - (2n+1)x)$  s'écrit sous la forme canonique  $\sum_{\beta \in B} (\beta - x)^{2n+1} S_n(\beta + E - B) / S_n(2\beta - B)$ .

Démonstration: la fonction  $f(\beta) = (\beta - x)^{2n+1} S_n(\beta + E - B)$  se développe en  $f(\beta) = \sum_{j \geq 0} \beta^j S_{n-j}(E - B) \cdot S_{2n+1}(\beta - (2n+1)x)$  puisque  $(\beta - x)^{2n+1} = S_{2n+1}(\beta - (2n+1)x)$  et que  $S_n(\beta + (E - B)) = \sum_{j \geq 0} \beta^j S_{n-j}(E - B)$ . Appliquant la formule de Lagrange à  $f(\beta)$ , on a d'après le lemme 2.2  $\sum_{\beta \in B} f(\beta) / S_n(2\beta - B) = \sum_{j \geq 0} S_{n-j}(E - B) \cdot S_{j+n+1}(B - (2n+1)x) = S_{2n+1}((E - B) + (B - (2n+1)x)) - S_{n+1}(E - B) \cdot S_n(B - (2n+1)x) - \dots - S_{2n+1}(E - B) \cdot S_0(B - (2n+1)x)$ . Or, d'après (1.13) toutes les  $S_{n+1}(E - B), \dots, S_{2n+1}(E - B)$  sont nulles, et donc  $f(\beta_0) \partial_B = S_{2n+1}((E - B) + (B - (2n+1)x)) = S_{2n+1}(E - (2n+1)x)$ .  $\square$

L'expression exacte des coefficients  $S_n(\beta + E - B) / S_n(2\beta - B)$  semble due à [Faa de Bruno] p.109.

## 4. DEGENERESCENCE .

Le théorème précédent n'a de sens que si toutes les racines  $\beta_i$  du catalectisant sont distinctes, car si  $\beta_0 = \beta_1$ , alors  $S_n(2\beta_0 - B) = (\beta_0 - \beta_1) \prod_{i>1} (\beta_0 - \beta_i) = 0 = S_n(2\beta_1 - B)$ , c'est-à-dire il y a au moins deux termes infinis dans la somme  $\sum f(\beta) / s_n(2\beta - B)$ . Nous allons traiter le cas d'indistinction maximale où toutes les racines sont égales :  $\beta_0 = \dots = \beta_n = \beta$ . Notre outil est la méthode dite formelle des algébristes du siècle passé, qui consiste à considérer les coefficients d'un polynôme comme les puissances successives d'une indéterminée.

En d'autres termes, étant donnés un alphabet  $E$  et une indéterminée  $e$ , on considère la fonctionnelle linéaire  $\pi$ , elle aussi notée à droite :

$$(4.1) \quad \forall j \geq 0, \quad e^j \longrightarrow S_j(E) = e^j \pi.$$

Alors  $(e-x)^{2n+1} \pi = S_{2n+1}(e - (2n+1)x) \pi = \sum S_{2n+1-j}(-(2n+1)x) e^j \pi = \sum S_{2n+1}(-(2n+1)x) \cdot S_j(E) = S_{2n+1}(E - (2n+1)x)$  qui est bien le polynôme que l'on veut étudier.

(4.2) PROPOSITION. Soient  $S_{2n+1}(E - (2n+1)x)$  un polynôme,  $S_{(n+1)n+1}(E-x)$  son catalectisant. Alors, pour que  $\beta$  soit une racine de multiplicité  $n+1$  de  $S_{(n+1)n+1}(E-x)$ , il faut et il suffit que  $\beta$  soit une racine de multiplicité au moins  $n+1$  de  $S_{2n+1}(E - (2n+1)x)$ .

Démonstration: le polynôme  $S_{2n+1}(E - (2n+1)x)$  peut s'écrire, à l'aide de (1.12), comme le déterminant  $(-1)^n S_{1n+1}(B-E, \dots, B-E, B - (2n+1)x)$ . Si  $B = (n+1)\beta$ , alors pour tout  $j \geq 0$ ,  $S_{n+1+j}(B - (2n+1)x)$  est divisible par  $(\beta - x)^{n+1}$ ; la dernière colonne du déterminant ci-dessus, a fortiori  $S_{2n+1}(E - (2n+1)x)$ , sont donc divisibles par  $(\beta - x)^{n+1}$ .

Réciproquement, s'il existe  $\beta$  qui soit racine de multiplicité au moins  $n+1$  de  $S_{2n+1}(E - (2n+1)x)$ , alors  $\beta$  est racine de ce polynôme et de ses  $n$  premières dérivées, i.e.  $S_{2n+1}(E - (2n+1)\beta) = 0 = S_{2n}(E - 2n\beta) = \dots = S_{n+1}(E - (n+1)\beta)$ , système que l'on peut remplacer, puisque pour tout entier  $j$ ,  $S_j(E - \beta) = S_j(E) - \beta S_{j-1}(E)$ , par le système

$$(4.3) \quad S_{2n+1}(E - (n+1)\beta) = 0 = \dots = S_{n+1}(E - (n+1)\beta).$$

Par ailleurs, partant du déterminant  $S_{(n+1)n+1}(E-x) = \begin{vmatrix} S_{n+1}(E-x) & \dots & S_{2n+1}(E-x) \\ S_1(E-x) & \dots & S_{n+1}(E-x) \end{vmatrix}$

et soustrayant, à l'intérieur des  $S_j(E-x)$ ,  $0, \beta, 2\beta, 3\beta, \dots, n\beta$  dans les colonnes successives, de gauche à droite, puis dans les lignes successives de bas en

haut, ce qui correspond à des combinaisons linéaires de lignes et de colonnes qui ne changent pas la valeur du déterminant, on obtient

$$S_{(n+1)^{n+1}}(E-x) = \begin{vmatrix} S_{n+1}(E-n\beta-x) & S_{n+2}(E-(n+1)\beta-x) & \dots & S_{2n+1}(E-2n\beta-x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_2(E-\beta-x) & S_3(E-2\beta-x) & \dots & S_{n+2}(E-(n+1)\beta-x) \\ S_1(E-x) & S_2(E-\beta-x) & \dots & S_{n+1}(E-n\beta-x) \end{vmatrix}$$

Ce dernier déterminant est triangulaire, puisque chaque terme de la partie supérieure est combinaison linéaire des polynômes (4.3). Enfin, pour ce qui est de la diagonale,

$$S_{n+1}(E-n\beta-x) = (e-\beta)^n(e-x)\pi = (e-\beta)^n(\beta-x)\pi \quad \text{puisque } 0 = S_{n+1}(E-(n+1)\beta) \\ = (e-\beta)^n(e-\beta)\pi ; \text{ le polynôme } S_{(n+1)^{n+1}}(E-x) \text{ est donc divisible par } (\beta-x)^{n+1} \quad \square$$

Supposons dès lors être dans le cas totalement dégénéré, i.e. qu'il existe  $\beta$ , racine de multiplicité  $n+1$  des polynômes  $S_{2n+1}(E-(2n+1)x)$  et  $S_{(n+1)^{n+1}}(E-x)$ . Ce dernier polynôme est donc à un facteur près  $(x-\beta)^{n+1}$  et l'on peut écrire  $\beta$  comme quotient de deux quelconques de ses coefficients successifs; malheureusement, ces dits coefficients sont des déterminants d'ordre  $n+1$  et échappent très vite aux moyens de calculs actuels, fussent-ils aussi élaborés que le système MACSYMA.

La racine  $\beta$  et le quotient  $Q(x) = S_{2n+1}(E-(2n+1)x) / (\beta-x)^{n+1}$  sont donnés par le théorème suivant.

(4.4) THEOREME. Soit un polynôme  $S_{2n+1}(E-(2n+1)x)$  ayant une racine  $\beta$  de multiplicité au moins  $n+1$ , e une indéterminée et  $\pi$  la fonctionnelle  $\{1, e, e^2, \dots\} \longrightarrow \{S_0(E), S_1(E), S_2(E), \dots\}$ . Alors

- 1)  $\forall 1 \leq j \leq n+1, (e^j - \beta^j)(e-\beta)^n \pi = 0$
- 2)  $(e-\beta)^n \pi = Q(\beta) / \binom{2n+1}{n}$
- 3)  $((e-\beta)^n \pi)^2 \binom{2n}{n} = (-1)^n S_{2n}(E-2ne) \pi$
- 4)  $\beta = S_{2n+1}(E-2ne)\pi / S_{2n}(E-2ne)\pi = e S_{2n+1}(E-2ne)\pi / S_{2n+1}(E-2ne)\pi$

Démonstration:

1) est une réécriture du système (4.3) puisque pour tout  $j \geq 0$ ,  $e^j(e-\beta)^{n+1}\pi = S_{j+n+1}(e-(n+1)\beta)\pi = S_{j+n+1}(E-(n+1)\beta)\pi \quad \square$

2)  $(n+1)! Q(\beta)$  est égal à la valeur en  $x = \beta$  de la  $n+1$ -ième dérivée de  $S_{2n+1}(E-(2n+1)x)$  d'après le marquis de l'Hôpital, c'est-à-dire égal à  $(2n+1) \dots (n+1) S_n(E-n\beta) = (2n+1) \dots (n+1) (e-\beta)^n \pi \quad \square$

3)  $S_{2n}(E-2ne) = S_{2n}(E-(n+1)\beta) + ((n+1)\beta - 2ne) =$

$$= \sum_{h=0}^{n-1} S_{2n-h}(E - (n+1)\beta) S_n((n+1)\beta - 2ne) + \sum_{j=0}^n S_{n-j}(E - (n+1)\beta) S_{n+j}((n+1)\beta - 2ne).$$

La première somme a tous ses termes nuls d'après (4.3). Par ailleurs, pour tout  $j \geq 0$ ,  $S_{n+j}((n+1)\beta - 2ne) = \beta^j (1 - e/\beta)^n S_n((n+j+1)\beta - je)$  d'après (1.7). Pour calculer l'image de  $S_{2n}(E - 2ne)$  et  $e S_{2n}(E - 2ne)$  par  $\pi$ , la partie 1) du théorème nous autorise à remplacer  $e^i (\beta - e)^n$ ,  $0 \leq i \leq n$ , par  $\beta^i (\beta - e)^n$ , i.e. remplacer  $S_{n+j}((n+1)\beta - 2ne)$  par  $\beta^j (1 - e/\beta)^n S_n((n+j+1)\beta - j\beta) = \beta^j (\beta - e)^n S_n(n+1)$ .

$$\begin{aligned} \text{On a donc } S_{2n}(E - 2ne)\pi &= \sum_{j=0}^n S_{n-j}(E - (n+1)\beta) S_n(n+1) \beta^j (\beta - e)^n \pi = \\ &= (\beta - e)^n \pi \cdot S_n(n+1) \sum_{j=0}^n S_{n-j}(E - (n+1)\beta) \beta^j = (\beta - e)^n \pi \cdot S_n(n+1) S_n(E - (n+1)\beta + \beta) = \\ &= (-1)^n S_n(e - n\beta) \pi \cdot S_n(n+1) S_n(E - n\beta) = (-1)^n S_n(n+1) (S_n(E - n\beta))^2; \text{ on conclut} \\ &\text{à l'égalité 3) en écrivant } S_n(n+1) = \binom{2n}{n} \quad \square \end{aligned}$$

4) Le même calcul donne  $e S_{2n}(E - 2ne)\pi = \beta S_{2n}(E - 2ne)\pi$  et  $e S_{2n+1}(E - 2ne)\pi = \beta S_{2n+1}(E - 2ne)\pi$ ; par contre, pour  $k > 1$ ,  $e^k S_{2n}(E - 2ne)\pi \neq \beta^k S_{2n}(E - 2ne)\pi$  puisque l'on a utilisé en cours de calcul  $e^j (e - \beta)^{n+1} \pi = \beta^j (e - \beta)^{n+1} \pi$ , égalité qui requiert  $j \leq n$  d'après le point 1) du théorème.

Finalement, on a  $e S_{2n}(E - 2ne)\pi = S_1(E) \cdot S_{2n}(E) - \binom{2n}{1} S_2(E) \cdot S_{2n-1}(E) + \dots + \binom{2n}{2n} S_{2n+1}(E) \cdot S_0(E) = S_{2n+1}(E - 2ne)\pi$  et donc

$$\beta = (S_{2n+1}(E - 2ne)\pi) / (S_{2n}(E - 2ne)\pi) = (e S_{2n+1}(E - 2ne)\pi) / (S_{2n+1}(E - 2ne)\pi) \quad \square$$

Les deux expressions de  $\beta$  comme quotient de deux formes quadratiques en les coefficients du polynôme  $S_{2n+1}(E - (2n+1)x)$  sont dues à [Sondat].

(4.5) EXEMPLE: Forme cubique. On suppose que le polynôme  $S_3(E - 3x)$  admet une racine double  $\beta$  et une racine simple  $\gamma$ :  $S_3(E - 3x) = (\beta - x)^2(\gamma - x)$ ;

on a donc  $S_3(E) = \beta^2 \gamma$ ,  $S_2(E) = \beta(\beta + 2\gamma)/3$ ,  $S_1(E) = (2\beta + \gamma)/3$ , ce qui implique  $S_{11}(E) = (\beta - \gamma)^2/9$ ,  $S_{12}(E) = 2\beta(\beta - \gamma)^2/9$ ,  $S_{22}(E) = \beta^2(\beta - \gamma)^2/9$ , et donc

$\beta = S_{12}(E) / 2S_{11}(E) = 2S_{22}(E) / S_{12}(E)$ , ce qui est bien l'expression donnée par le théorème, puisque  $S_{11}(E) = S_1(E) \cdot S_1(E) - S_2(E)$ ,  $S_{12}(E) = S_1(E) \cdot S_2(E) - S_3(E)$ ,  $S_{22}(E) = S_2(E) \cdot S_2(E) - S_1(E) \cdot S_3(E)$ .

On trouve chez [Eisenstein] une analyse de la forme cubique, avec des applications à la théorie des nombres. Le catalecticant étant  $S_{22}(E) - x S_{12}(E) + x^2 S_{11}(E)$ , le discriminant est donc  $S_{12}(E) \cdot S_{12}(E) - 4 S_{11}(E) \cdot S_{22}(E)$ ; c'est bien l'expression d'Eisenstein aux notations près.

(4.6) EXEMPLE: Forme quintique . On suppose que l'on a une racine triple :

$$\begin{aligned} S_5(E-5x) &= (\beta-x)^3(\gamma-x)(\delta-x) \text{ et donc } S_5(E) = \beta^3\gamma\delta, \quad S_4(E) = \beta^2(\beta\gamma+\beta\delta+3\gamma\delta)/5, \\ S_3(E) &= (\beta^3+3\beta^2\gamma+3\beta^2\delta+3\beta\gamma\delta)/10, \quad S_2(E) = (3\beta^2+3\beta\gamma+3\beta\delta+\gamma\delta)/10, \\ S_1(E) &= (3\beta+\gamma+\delta)/5. \end{aligned}$$

On trouve, écrivant  $S^{ij}$  pour le produit  $S_i(E) \cdot S_j(E)$ , que

$$6s^{22} - 8s^{13} + 2s^{04} = 3(\beta - \gamma)(\beta - \delta)/100, \quad 2s^{23} - 3s^{14} + s^{05} = 3\beta(\beta - \gamma)(\beta - \delta)/100,$$

$$6S^{33} - 8S^{24} + 2S^{15} = 3\beta^2 (\beta - \gamma)(\beta - \delta)/100 \quad \text{et donc}$$

$$\beta = (2s^{23} - 3s^{14} + s^{05}) / 2(3s^{22} - 4s^{13} + s^{04})$$

$$= 2 ( 3s^{33} - 4s^{24} + s^{15} ) / ( 2s^{23} - 3s^{14} + s^{05} )$$

comme l'affirme le théorème.



## REFERENCES.

- C.BREZINSKI - Padé-type Approximants, Birhäuser 1980
- A.CAYLEY - Journal de Crelle 54(1858) 48-58, 292
- J.EISENSTEIN - Journal de Crelle 27(1844) 75-79 & 89-104
- FAA DE BRUNO - Théorie des formes binaires, Turin 1876
- L&S 1 = A.LASCOUX & M.P.SCHÜTZENBERGER - in Invariant theory, Springer L.N. 996
- L&S 2 = A.LASCOUX & M.P.SCHÜTZENBERGER - in Séminaire d'algèbre M.P.Malliavin 1984, Springer L.N. 1146
- A.LASCOUX & SHI HE - Comptes Rendus Ac.Sc.Paris, 300(1985) 681
- I.G.MACDONALD - Symmetric Functions and Hall Polynomials, Oxford Mat.Mono. 1979
- P.SONDAI - Nouv.Ann.Math. 19, 3<sup>ème</sup> série (1900) 25-28
- J.J.SYLVESTER - Collected Work, Chelsea reprint : Tome I, p.203-216, 265-283,  
Tome II, p.18-27

L.I.T.P., U.E.R.Maths Paris 7  
2place Jussieu, 75251 Paris Cedex05