Opérateurs différentiels sur l'anneau des polynômes symétriques

Alain Lascoux(*)

version très provisoire *Mars 1991*

English Summary. — Given an alphabet $\mathbb{A} = \{a,a',\ldots\}$ (which may be considered as the set of roots of a polynomial $P(x) = (x-a)(x-a')\cdots$), Cayley intiated *Invariant Theory* by asking which symmetric functions $S(\mathbb{A})$ are invariant under uniform translations $\mathbb{A} \to \mathbb{A}^{+\varepsilon} = \{a+\varepsilon,a'+\varepsilon,\ldots\}$. Such functions are called *semi-invariants.*

Writing $\frac{\partial}{\partial_\varepsilon}(S) = 0$, one obtains that S is semi-invariant iff $\nabla_{-1}(S) = 0$, with $\nabla_{-1} = \partial_a + \partial_{a'} + \cdots$.

Any algebraic basis of symmetric functions will give an expression of the equation $\frac{\partial}{\partial_\varepsilon}(S) = 0$; for example, the elementary symmetric functions Λ^i are such that $\frac{\partial}{\partial_\varepsilon}\Big(\Lambda^i(\mathbb{A}^{+\varepsilon})\Big) = (n-i)\Lambda^{i-1}(\mathbb{A})$, with $n = card(\mathbb{A})$. A function is therefore semi-invariant iff it is in the kernel of $n\partial_{\Lambda^1} + (n-1)\Lambda^1\partial_{\Lambda^2} + \cdots$

Introducing binomial coefficients in the expression of $P(x)$, or formally defining another alphabet $\mathbb{B}$ by the relations $\Lambda^i(\mathbb{A}) = \binom{N}{i}\Lambda^i(\mathbb{B})$, $i = 0,1,\ldots,n$, we obtain new expressions of the operator ∇_{-1}. In particular, ∇_{-1} equals

$$\Omega_{-1,\mathbb{B}} := \partial_{\Lambda^1}(\mathbb{B}) + 2\Lambda^1(\mathbb{B})\partial_{\Lambda^2(\mathbb{B})} + \cdots \ .$$

The cardinal of $\mathbb{A}$ has now disappeared, and this allows us to consider *perpetuants*, i.e. elements of the kernel of $\Omega_{-1,\mathbb{B}}$ for $\mathbb{B}$ infinite. This kernel was determined by MacMahon : it is exactly the linear span of monomial functions $\Psi_J(\mathbb{B})$ for all partitions J with no part equal to 1 (th 4.5).

Cayley computed many tables of semi-invariants. His method was to find operators $\heartsuit$ such that the commutator $[\heartsuit,\nabla_{-1}]$ vanishes. Such operators $\heartsuit$ therefore preserve the kernel of ∇_{-1}, and will generate, from the given invariants, a space of invariants of hopefully higher dimension. The method followed here is to consider products of elementary symmetric functions as monomial functions in another alphabet – this furnishes some generalizations of Cayley's operators (th 2.4).

Schur functions are the fundamental linear basis of symmetric polynomials. Since the image of the Vandermonde : $\Delta(\mathbb{A}) = (a-a')\cdots$ by ∇_{-1} is null, one easily obtains by computing $\nabla_{-1}\Big(\Delta S_I(\mathbb{A})\Big)$ that $\nabla_{-1}(S_I)$ is a sum $\sum(\star)S_J$, with integral coefficients $(\star)$, summed on all partitions such that $I - J = 0\cdots010\cdots0$. Introducing coefficients in the Jacobi-Trudi determinantal expression of Schur functions (normalization 3.2) forces the coefficients $(\star)$ to become all equal to 1.

The operators $\nabla_k = \sum_{a\in\mathbb{A}} a^{k+1}\partial_a$ satisfy the fundamental commutation relations $[\nabla_k,\nabla_l] = (l-k)\nabla_{k+l}$. It is easy to compute the image of $\Delta S_I(\mathbb{A})$ under the ∇_k. However, the Vandermonde is no longer a scalar for ∇_k. To compensate, one deforms the ∇_k into operators L_k so that

$$[L_k,L_l] = (l-k)L_{k+l} + c\partial_{k,-l}$$

and

$$L_k\Big(S_I(\mathbb{A})\Big) = \sum(\star)S_J(\mathbb{A}) \ ,$$

sum on all vectors J such that $I - J = 0\cdots0k0\cdots0$, with integral coefficients $(\star)$.

Remarking that the cardinal of $\mathbb{A}$ can be treated as a free parameter μ, one can now let $\mathbb{A}$ become infinite to get the usual Virasoro operators. With this explicit description,

(*) $\in$ *L.I.T.P.* $\subset$ *I.B.P.* $\subset$ *C.N.R.S.* $\subset$ *FRANCE*

it is immediate, for example, that all Schur functions indexed by a rectangular partition $(m-\mu)^m$, $m = 1,2,\ldots$ are in the kernel of the Virasoro operators (Lemma 3.10).

Beginning with the work of Hammond and MacMahon, differential calculus on symmetric functions has been replaced by linear algebra with the usual scalar product on the space of symmetric functions : the derivatives with respect to power sums are adjoint to multiplication by power sums, up to a scalar. One can now take the adjoint operators of all the differential operators introduced in the study of semi-invariants. For example, $\exp\left(\sum z^k \partial_{\psi^k}\right)$ is just the adjoint of the multiplication by the sum of complete functions $\sum z^n S^n$.

One may take several alphabets $\mathbb{A},\mathbb{X}\ldots$ at the same time and define covariants as functions symmetrical separately in $\mathbb{A},\mathbb{X}$, &c. and invariants under any uniform translation $\mathbb{A}\to\mathbb{A}^{+\varepsilon}$, $\mathbb{X}\to\mathbb{X}^{+\varepsilon}$, ... The usual case is for a finite $\mathbb{A}$ and $\mathbb{X}$ reduced to an element x. The simplest non-constant covariant is of course $\prod_{a\in\mathbb{A}}(x-a) = \prod\Big((x+\varepsilon)-(a+\varepsilon)\Big)$. The most classical one is the *Hessian*; we more generally show that Schur functions indexed by rectangular partitions are covariants (prop 5.2). Another covariant that we use in the sequel is the *discriminant* (prop 5.3).

Covariants in $\mathbb{A},\mathbb{X}$ give rise to interesting differential operators when identifying the monomials in $\mathbb{X}$ to products of derivatives with respect to elementary symmetric functions in $\mathbb{A}$.

For example, from the discriminant, one obtains an operator due to Bacry, which generalizes the Laplacian and has Schur functions as eigenfunctions (th 6.10).

Taking any a in $\mathbb{A}$, the partial derivative of a symmetric function $S(\mathbb{A})$ with respect to a is a function that one can symmetrize again to get on operator on the space of symmetric functions. The operators encountered in the study of invariants are of this type (Lemma 7.2).

Symmetrization involves the "Jacobi-Trudi" operator $\pi_{\mathbb{A}}$ which sends monomials to Schur functions. More generally, one can also get with the help of $\pi_{\mathbb{A}}$ the Schur functions of $\mathbb{A}+z$ or $\mathbb{A}-z$, with z an extra indeterminate, as well as the vertex operators

$$V_{\mathbb{A},z} := \sum z^{-h} S^h \sum (-z)^j D_{\Lambda^j}$$

and

$$V_{-\mathbb{A},z} := \sum (-z)^{-h} \Lambda^h \sum z^j D_{S^j} \ .$$

The method of replacing a function by a monomial, as allowed by the use of $\pi_{\mathbb{A}}$, has been used with great success by formal algebraists of 19$^{\text{ième}}$, not always rigorously however.

Vertex operators are a fundamental tool of Concrete Physics. Let us just mention Hirota's operators on the space of symmetric functions in $\mathbb{A}$:

$$H_k(f) := \text{coefficient of } \zeta^k \text{ in the product } \Big(V_{-\mathbb{A},\zeta}(f(\mathbb{A})\Big)\Big(V_{\mathbb{A},\zeta}(f(\mathbb{A})\Big) \ .$$

Kadomtsev-Petviashvili equation is $H_1(f) = 0$. It was obtained by Sato, Date, Jimbo, Kashiwara, Miwa that Schur functions are the solutions of this last equation. Indeed, from $V_{\mathbb{A},\zeta}\Big(S_I(\mathbb{A})\Big) = \sum \zeta^k S_{Ik}(\mathbb{A})$, one instantly gets

$$H_1\Big(S_I(\mathbb{A})\Big) = \sum_{h+k=-1} S_{I^{\sim}h}(-\mathbb{A})\, S_{Ik}(\mathbb{A}) \ .$$

This gives the required kernel of H_1, as well as the link with quadratic relations between minors (*Plücker Relations*).

1. Introduction. —

Soit $\mathbb{B}$ un alphabet de cardinal n. Les *fonctions symétriques élémentaires* de $\mathbb{B}$, $\Lambda^i(\mathbb{B})$, $i \in \mathbb{Z}$, sont les coefficients du polynôme $\prod_{b\in\mathbb{B}}(x+b)$ (et donc, $\Lambda^i(\mathbb{B}) = 0$ si $i \notin \{0,\ldots,n\}$). A l'alphabet $\mathbb{B}$, on associe aussi le polynôme $P(x) = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}\Lambda^1(\mathbb{B}) + \binom{n}{2}x^{n-2}\Lambda^2(\mathbb{B}) + \cdots$.

On aura besoin des fonctions symétriques suivantes :

- les produits de fonctions élémentaires $\Lambda^I(\mathbb{B}) = \Lambda^{I_1}(\mathbb{B})\cdots\Lambda^{I_n}(\mathbb{B})$, pour $I = (I_1,\ldots,I_n) \in \mathbb{Z}^n$;
- les fonctions *complètes* $S_j(\mathbb{B})$ définies par la série génératrice $\prod_{b\in\mathbb{B}}(1-zb)^{-1} = \sum_{-\infty}^{+\infty} z^j S_j(\mathbb{B})$; $S_j = 0$ pour $j < 0$;
- les *fonctions de Schur* $S_{J/I}(\mathbb{B})$, $J,I \in \mathbb{Z}^n$ définies comme des déterminants en les fonctions complètes :

$$S_{J/I}(\mathbb{B}) = det\big|\, S_{J_k-I_h+k-h}(\mathbb{B})\,\big|_{h,k} \quad ;$$

on écrit S_J lorsque $I = 0\cdots 0$;

- les *fonctions monomiales* : $\psi_J(\mathbb{B})$, $J \in \mathbb{N}^n$, est la somme de tous les monômes différents de degré J ;
- les *fonctions monomiales augmentées*: Pour $J \in \mathbb{N}^n$, $\Phi_J(\mathbb{B}) = \frac{1}{n!}\sum_\mu (e^J)^\mu$, somme sur tout le groupe symétrique $\mathfrak{S}(n)$ des images du monôme de degré J, noté e^J. La fonction $\psi_J(\mathbb{B})$ est le produit de $\Phi_J(\mathbb{B})$ par le coefficient multinomial $\binom{n}{m_0,m_1,\ldots}$, où $m_0,m_1,\ldots$ sont les nombres respectifs de coordonnées de J égales à 0,1,…
- les *fonctions somme de puissances* $\psi^i = \psi_{0\cdots 0i}$ et leurs produits $\psi^{i\cdots j} = \psi^i\cdots\psi^j$.

Définition : Une fonction symétrique de $\mathbb{B}$ est *semi-invariante* si en tant que fonction des coefficients de $P(x)$ elle est invariante vis-à-vis de la translation : $P(x) \longrightarrow P_\varepsilon(x) = P(x+\varepsilon)$. Une fonction symétrique est *non-unitaire* ssi elle est annulée par l'opérateur $\partial_{\psi^1(\mathbb{B})}$.

Considérant le coefficient de ε^1 dans $P(x+\varepsilon)$, on obtient

Lemme (1.1). — *Une fonction est semi-invariante ssi elle est annulée par l'opérateur* $\Omega_{-1} := \partial_{\Lambda^1} + 2\Lambda^1\partial_{\Lambda^2} + 3\Lambda^2\partial_{\Lambda^3} + \cdots$

On aura plus généralement à utiliser les opérateurs suivants :

- les opérateurs $\nabla_k = \sum b^{k+1}\partial_b$, $k \in \mathbb{Z}$,
- les opérateurs $\Omega_{-r} = \partial_{\Lambda^r} + 2\Lambda^1\partial_{\Lambda^{r+1}} + 3\Lambda^2\partial_{\Lambda^{r+2}} + \cdots$, $r \geq 1$,

- les opérateurs $\Theta_r = \Lambda^r \partial_{\Lambda^0} + \Lambda^{r+1}\partial_{\Lambda^1} + \Lambda^{r+2}\partial_{\Lambda^2} + \cdots$, $r \in \mathbb{Z}$.

Nous verrons plus loin quel sens précis donner à l'opérateur ∂_{Λ^0}.

Pour $k \geq 1$, les identités $\nabla_k(\Lambda^j) = \psi_{1^{j-1}k+1}$ impliquent que

$$\nabla_k = \sum \psi_{1^{j-1}k+1}\partial_{\Lambda^j} \ . \tag{1.2}$$

Lemme (1.3). — $[\nabla_k,\nabla_l] = (l-k)\nabla_{k+l}$

Remarque: ∇_0 est le degré (en $\mathbb{B}$) et $\nabla_{-1} = \sum \partial_b = \sum (n-i+1)\Lambda^{i-1}\partial_{\Lambda^i}$.

Nous considérerons différents alphabets $\mathbb{A},\ldots,\mathbb{E}$ et les opérateurs correspondants $\Omega_{r,\mathbb{A}}$,$\Theta_{r,\mathbb{A}}$,$\nabla_{k,\mathbb{A}}$ &c.

Le "changement d'alphabet" $\mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{A} : \Lambda^i(\mathbb{A}) = \binom{n}{i}\Lambda^i(\mathbb{B})$ induit la relation

$$\begin{aligned} \nabla_{-1,\mathbb{A}} = \sum \partial_a \quad &= \quad \partial_{\Lambda^1(\mathbb{B})} + 2\Lambda^1(\mathbb{B})\partial_{\Lambda^2(\mathbb{B})} + 3\Lambda^2(\mathbb{B})\partial_{\Lambda^3(\mathbb{B})} + \cdots \\ &= (n+1)D_{\psi^1(\mathbb{B})} - \sum \partial_b \end{aligned} \tag{1.4}$$

Corollaire (1.5). — *Une fonction des coefficients d'un polynôme $P(x) = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}\,\Lambda^1(\mathbb{B}) + \cdots = x^n + x^{n-1}\,\Lambda^1(\mathbb{A}) + \cdots$ est semi-invariante ssi elle est annulée par $\nabla_{-1,\mathbb{A}} = \Omega_{-1,\mathbb{B}}$.*

Plus généralement, on dira qu'une fonction symétrique $S(\mathbb{A})$ est semi-invariante en $\mathbb{A}$ ssi elle est invariante sous les translations uniformes $\mathbb{A} \to \mathbb{A}^{+\varepsilon} = \{(a+\varepsilon)\}_{a\in\mathbb{A}}$.

Le changement d'alphabet, introduisant des factorielles plutôt que des binomiaux, $\mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{C} : \Lambda^i(\mathbb{C}) = i!\Lambda^i(\mathbb{A})$ a pour effet que

$$\partial_{\psi^1(\mathbb{A})} = \partial_{\Lambda^1(\mathbb{C})} + 2\Lambda^1(\mathbb{C})\partial_{\Lambda^2(\mathbb{C})} + 3\Lambda^2(\mathbb{C})\partial_{\Lambda^3(\mathbb{C})} + \cdots = \Omega_{-1,\mathbb{C}} \ ,$$

d'où l'identité des noyaux de $\partial_{\psi^1(\mathbb{A})}$ et $\Omega_{-1,\mathbb{C}}$.

On trouvera dans [K&Ro] d'autres méthodes algébriques pour décrire les invariants des formes binaires ; le point de vue théorie des groupes est développé par [Ho].

2. Les opérateurs de Cayley. — Dans de nombreux articles, Cayley (voir l'index de ses oeuvres complètes) se propose de produire des opérateurs différentiels qui préservent l'espace des semi-invariants, et donc permettent d'engendrer un espace de semi-invariants à partir d'un semi-invariant calculé directement d'après la définition 1.1.

Théorème 2.1 (Cayley). — *Soit $\mathbb{C}$ un alphabet infini. Les opérateurs suivants, agissant sur le sous- espace des polynômes homogènes de degré ω en $\mathbb{C}$, et homogènes de degré k en les $\Lambda^0(\mathbb{C}),\Lambda^1(\mathbb{C}),\ldots$, préservent l'appartenance au noyau de $\Omega_{-1,\mathbb{B}}$:*

(i) $\big(\Lambda^1\partial_{\Lambda^0}+\Lambda^2\partial_{\Lambda^1}+\Lambda^3\partial_{\Lambda^2}+\cdots\big)^2-k\big(\Lambda^2\partial_{\Lambda^0}+\Lambda^3\partial_{\Lambda^1}+\Lambda^4\partial_{\Lambda^2}+\cdots\big)$

(ii) $\big(\Lambda^1\partial_{\Lambda^0}+\Lambda^2\partial_{\Lambda^1}+\Lambda^3\partial_{\Lambda^2}+\cdots\big)\big(\Lambda^2\partial_{\Lambda^1}+2\Lambda^3\partial_{\Lambda^2}+3\Lambda^4\partial_{\Lambda^3}+\cdots\big)-\omega\big(\Lambda^2\partial_{\Lambda^0}+\Lambda^3\partial_{\Lambda^1}+\Lambda^4\partial_{\Lambda^2}+\cdots\big)-\frac{1}{3}k\big(\Lambda^3\partial_{\Lambda^1}+2\Lambda^4\partial_{\Lambda^2}+3\Lambda^5\partial_{\Lambda^3}+\cdots\big)$

(iii) $\big(\Lambda^2\partial_{\Lambda^1}+2\Lambda^3\partial_{\Lambda^2}+3\Lambda^4\partial_{\Lambda^3}+\cdots\big)^2-\frac{1}{3}(4\omega+2)\big(\Lambda^3\partial_{\Lambda^1}+2\Lambda^4\partial_{\Lambda^2}+\cdots\big)$

Cayley [Ca 1] a donné une extension de la propriété *(i)*, mais ses occupations professionnelles ne lui en ont pas laissé le temps pour les propriétés *(ii)* et *(iii)*. Pour démontrer et étendre son théorème nous introduirons un espace isomorphe à l'espace des semi-invariants homogènes de degré k en les $\Lambda^0(\mathbb{C}),\ldots,\Lambda^n(\mathbb{C})$.

Soit $\mathcal{M}_k$ le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{Sym}(\mathbb{C})$ de base les $\Lambda^J(\mathbb{C})$, $J\in\mathbb{N}^k$. Soit de plus $\mathbb{D}$ un alphabet de cardinal k, $\mathfrak{Sym}(\mathbb{D})$ l'espace vectoriel des polynômes symétriques en $\mathbb{D}$. Alors le morphisme $\mathcal{M}_k\xrightarrow{\eta}\mathfrak{Sym}(\mathbb{D})$:

$$(2.2)\qquad J\in\mathbb{N}^k,\quad \Lambda^J(\mathbb{C})\longrightarrow\Phi_J(\mathbb{D})=\frac{1}{k!}\sum\nolimits_{\mu\in\mathfrak{S}(k)}(e^J(\mathbb{D}))^\mu$$

est un isomorphisme. Comme les opérateurs dont nous avons besoin sont définis par leur action sur la base Λ^J, il est facile de décrire leur transfert par η. En particulier, l'image par η de l'opérateur $\Theta_{r,\mathbb{C}}$, $r\ge 0$ est la multiplication par $\psi^r(\mathbb{D})=k\Phi_r(\mathbb{D})$; l'image de la partie du deuxième ordre du produit d'opérateurs $\Theta_{r,\mathbb{C}}\Theta_{p,\mathbb{C}}$ est la multiplication par $k(k-1)\Phi_{r,p}(\mathbb{D})$, &c. L'image de l'opérateur $\Omega_{r-1,\mathbb{C}}$, $r\ge 0$, est l'opérateur $\sum_{d\in\mathbb{D}}d^r\partial_d=\nabla_{r-1,\mathbb{D}}$.

Un cinquième alphabet de cardinal k, disons $\mathbb{E}$, permet de simplifier les calculs de Cayley. Définissons le par les sommes de puissance correspondantes :

(2.3) $\psi^1(\mathbb{E})=\frac{1}{k}S_1(\mathbb{D})$, $\psi^2(\mathbb{E})=\frac{1}{k(k+1)}S_2(\mathbb{D})-\frac{1}{k(k-1)}S_{1\,1}(\mathbb{D})$, ..., $\psi^r(\mathbb{E})=\sum(-1)^iS_{1^ir-i}(\mathbb{D})/(k-i)\cdots k\cdots(k+r-1)$, ..., $1\le r\le k$.

Les fonctions symétriques de $\mathbb{E}$ appartiennent donc à l'espace $\mathfrak{Sym}(\mathbb{D})$. On définit une nouvelle famille d'opérateurs $\zeta_2,\zeta_3,\ldots$ comme suit, notant ∇_r pour $\nabla_{r,\mathbb{D}}$ et ξ_j pour $j\nabla_0+\binom{j}{2}$:

$$\zeta_2=-\nabla_1^2(\xi_2-\xi_1)+\big(\nabla_1\nabla_1\xi_2-\tfrac{2}{3}\ \nabla_2\xi_2\xi_1\big)$$
$$\zeta_3=-\nabla_1^3(\xi_3-\xi_2)+\big(\nabla_1\nabla_1^2\xi_3-\tfrac{2}{3}\ \nabla_2\nabla_1\xi_3\xi_2+\tfrac{2\cdot 2}{3\cdot 4}\ \nabla_3\xi_3\xi_2\xi_1\big)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\zeta_r = -\nabla_1^r(\xi_r - \xi_{r-1}) + \big(\nabla_1\,\nabla_1^{r-1}\xi_r - \tfrac{2}{3}\,\nabla_2\,\nabla_1^{r-2}\xi_r\xi_{r-1} + \frac{2^{r-1}}{3\cdots r+1}\nabla_r\,\nabla_1^0\xi_r\cdots\xi_1\big)$$

Moyennant les relations 2.2 et 2.3 les espaces $\mathfrak{Sym}(\mathbb{D})$ et $\mathfrak{Sym}(\mathbb{E})$ peuvent être considérés comme des sous-espaces de $\mathfrak{Sym}(\mathbb{C})$ et l'on peut donner la généralisation suivante du théorème de Cayley:

Théorème 2.4. — *Soient trois alphabets* $\mathbb{C},\mathbb{D},\mathbb{E}$ *liés par les relations 2.2 et 2.3. Alors le sous-espace dans* $\mathfrak{Sym}(\mathbb{D})$ *des fonctions annulées par* $\Omega_{-1,\mathbb{C}}$ *est préservé par :*

(i) La multiplication par les fonctions symétriques non unitaires de $\mathbb{E}$.

(ii) les opérateurs $\diamondsuit_r = \psi^r(\mathbb{D})\nabla_0 - \frac{1}{2}\binom{r}{1}\psi^{r-1}(\mathbb{D})\nabla_1 + \frac{1}{3}\binom{r}{2}\psi^{r-2}(\mathbb{D})\nabla_2 + \cdots \pm \frac{1}{r+2}\binom{r}{r}\psi^0(\mathbb{D})\nabla_{r+1}$, $r \geq 0$.

(iii) les opérateurs ζ_r , $r \geq 2$.

Démonstration (i). — L'image d'une fonction de Schur en $\mathbb{D}$ par l'opérateur $\Omega_{-1,\mathbb{C}} = \sum \partial_d$ s'écrit *à vue* (formule 3.1) et l'on vérifie ainsi que pour tout $2 \leq r \leq k$, $\sum \partial_d(\psi^r(\mathbb{E})) = 0$. Si P est une fonction semi-invariante en $\mathbb{C}$ (de manière équivalente, P est annulée par $\sum \partial_d$), alors le produit de P par un nombre quelconque de $\psi^r(\mathbb{E})$,$k \geq r \geq 2$ est encore annulé par $\sum \partial_d$ □

(ii). — Le commutateur $[\sum \partial_d\,, \diamondsuit_r]$ est égal à $\psi^r \sum \partial_d + r\psi^{r-1}\sum d\partial_d - r\psi^{r-1}\sum d\partial_d - r(r-1)\psi^{r-2}\sum \frac{1}{2}d^2\partial_d + \binom{r}{2}\psi^{r-2}\sum d^2\partial_d + \cdots$, c'est-à-dire est nul □

(iii) La nullité des commutateurs $[\sum \partial_d\,, \zeta_r]$ découle tout aussi inexorablement des identités 1.3 : $[\nabla_{-1}\,, \nabla_r] = (r+1)\nabla_{r-1}$ □

Exemple de (i). — Soit $k = 3$. La multiplication par $4 \times 5!\psi^3(\mathbb{E}) = 8S_3(\mathbb{D}) - 20S_{12}(\mathbb{D}) + 80S_{111}(\mathbb{D}) = 2\psi^{111}(\mathbb{D}) - 9\psi^{12}(\mathbb{D}) + 9\psi^3(\mathbb{D})$ est l'image de l'opérateur $2\Theta_1\Theta_1\Theta_1 - 9\Theta_1\Theta_2 + 9\Theta_3$. L'action de cet opérateur sur la fonction semi-invariante $P = \Lambda^{003} - 3\Lambda^{012} + 2\Lambda^{111}$, en écrivant Λ^I pour $\Lambda^I(\mathbb{C})$, se décompose comme suit :

$$\Theta_1(P) = \Lambda^{004} - \Lambda^{013} - 3\Lambda^{022} + 3\Lambda^{112} \quad ;$$
$$\Theta_1\Theta_1(P) = \Lambda^{005} + \Lambda^{014} - 7\Lambda^{023} + 2\Lambda^{113} + 3\Lambda^{122} \quad ;$$
$$\Theta_1\Theta_1\Theta_1(P) = \Lambda^{006} + 3\Lambda^{015} - 6\Lambda^{024} - 7\Lambda^{033} + 3\Lambda^{114} + 3\Lambda^{123} + 3\Lambda^{222} \ ,$$
$$\Theta_1\Theta_2(P) = \Lambda^{006} - \Lambda^{015} - 4\Lambda^{024} - \Lambda^{033} + 3\Lambda^{114} + 5\Lambda^{123} - 3\Lambda^{222} \ ,$$
$$\Theta_3(P) = \Lambda^{006} - 3\Lambda^{015} - 3\Lambda^{024} + 2\Lambda^{033} + 6\Lambda^{114} - 3\Lambda^{123} \ .$$

Finalement

$$(2\Theta_1\Theta_1\Theta_1-9\Theta_1\Theta_2+9\Theta_3)(P)=2\Lambda^{006}-12\Lambda^{015}-3\Lambda^{024}+13\Lambda^{033}$$
$$+33\Lambda^{114}-66\Lambda^{123}+33\Lambda^{222}\quad .$$

On peut contrôler directement que cette fonction est annulée par l'opérateur $\partial_{\Lambda^1(\mathbb{C})}+2\Lambda^1(\mathbb{C})\partial_{\Lambda^2(\mathbb{C})}+3\Lambda^2(\mathbb{C})\partial_{\Lambda^3(\mathbb{C})}+\cdots$.

Exemple de (ii). — L'image par η de la fonction P est $\Phi_{003}(\mathbb{D})-3\Phi_{12}(\mathbb{D})+2\Phi_{111}(\mathbb{D})$ que l'opérateur $\frac{1}{3}\diamondsuit_3$ envoie sur $\psi^3(\mathbb{D})\big(\Phi_{003}-3\Phi_{012}+2\Phi_{111}\big)-\psi^2(\mathbb{D})\big(\frac{3}{2}\Phi_{004}-\frac{3}{2}\Phi_{022}-3\Phi_{013}+3\Phi_{112}\big)+\psi^1(\mathbb{D})\big(\Phi_{005}-\Phi_{023}-2\Phi_{014}+2\Phi_{113}\big)-\psi^0(\mathbb{D})\big(\frac{1}{4}\Phi_{006}-\frac{1}{4}\Phi_{024}-\frac{1}{2}\Phi_{015}+\Phi_{114}\big)=-\frac{1}{4}\Phi_{006}+\frac{3}{2}\Phi_{015}-\frac{21}{4}\Phi_{024}+4\Phi_{033}+\frac{3}{2}\Phi_{114}-3\Phi_{123}+\frac{3}{2}\Phi_{222}$.

L'image inverse par η de cette dernière est la fonction semi- invariante $-\frac{1}{4}\Lambda^{006}(\mathbb{C})+\frac{3}{2}\Lambda^{015}(\mathbb{C})-\frac{21}{4}\Lambda^{024}(\mathbb{C})+4\Lambda^{033}(\mathbb{C})+\frac{3}{2}\Lambda^{114}(\mathbb{C})-3\Lambda^{123}(\mathbb{C})+\frac{3}{2}\Lambda^{222}(\mathbb{C})$.

Exemple de (iii). — L'image de P par $\zeta_3=\big(\nabla_1\nabla_1\nabla_1-\frac{2}{3}\nabla_2\nabla_1\xi_3+\frac{1}{3}\nabla_3\xi_3\xi_1\big)\xi_2$ se présente comme suit :

$$\nabla_1(P)=3\Phi_{004}-6\Phi_{013}-3\Phi_{022}+6\Phi_{112}\quad ;$$
$$\nabla_1\nabla_1(P)=12\Phi_{005}-18\Phi_{014}-18\Phi_{023}+12\Phi_{122}+12\Phi_{113}\quad ;$$
$$\nabla_1\nabla_1\nabla_1(P)=60\Phi_{006}-72\Phi_{015}-72\Phi_{024}-36\Phi_{033}+36\Phi_{114}+60\Phi_{123}+12\Phi_{222};$$
$$\nabla_2\nabla_1(P)=12\Phi_{006}-18\Phi_{015}-12\Phi_{024}-6\Phi_{033}+12\Phi_{114}+12\Phi_{123}\quad ;$$
$$\nabla_3(P)=3\Phi_{006}-6\Phi_{015}-3\Phi_{024}+6\Phi_{114}\quad .$$

Finalement, $\zeta_3(P)=7\times 12\big(-\Phi_{024}+\Phi_{033}+\Phi_{114}-2\Phi_{123}+\Phi_{222}\big)$ est bien l'image par η d'un semi-invariant, à savoir

$$7\times 12\big(-\Lambda^{024}(\mathbb{C})+\Lambda^{033}(\mathbb{C})+\Lambda^{114}(\mathbb{C})-2\Lambda^{123}(\mathbb{C})+\Lambda^{222}(\mathbb{C})\big)\quad .$$

Le théorème de Cayley est bien un cas particulier du théorème précédent:

- le premier opérateur considéré par Cayley n'est autre que $\Theta_{1,\mathbb{C}}\Theta_{1,\mathbb{C}}-k\Theta_{2,\mathbb{C}}$ dont l'image par η est l'opérateur de multiplication par $\psi_1(\mathbb{D})\psi_1(\mathbb{D})-k\psi_2(\mathbb{D})=-(k-1)k(k+1)\psi_2(\mathbb{E})$;
- le deuxième est l'opérateur $\diamondsuit_2$;
- On constate finalement que $\zeta_2=-\nabla_1\nabla_1(\xi_2-\xi_1)+\nabla_1\nabla_1\xi_2-\frac{2}{3}\nabla_2\xi_2\xi_1$ est le produit du troisième opérateur de Cayley $\nabla_1\nabla_1-\frac{2}{3}\nabla_2\xi_2$ par ξ_1.

3 . Normalisation des fonctions de Schur et algèbre de Virasoro. — Une sixième méthode est plus appropriée au calcul des semi-invariants dans la base des fonctions de Schur. On part tout d'abord de l'expression, due à Cauchy et Jacobi, d'une fonction de Schur en les lettres a d'un alphabet $\mathbb{A}$ de cardinal n comme un quotient de deux déterminants en les puissances des a (*cf* [Macd, I.3.1]).

$$\text{Pour tout } I \in \mathbb{N}^n, \quad S_I(\mathbb{A}) = \frac{det|\ a^{I_1} a^{I_2+1} \cdots a^{I_n+n-1}\ |_{a\in\mathbb{A}}}{det|\ a^0 a^1 \cdots a^{n-1}\ |_{a\in\mathbb{A}}} \quad .$$

Le dénominateur, que nous noterons $\Delta(\mathbb{A})$, est le *Vandermonde* égal au produit des différences des lettres de $\mathbb{A}$. L'image du numérateur $det|\, a^{I_1} a^{I_2+1} \cdots a^{I_n+n-1}\, |$ par l'opérateur $\sum \partial_a$ est la somme
$I_1|\, a^{I_1-1} a^{I_2+1} \cdots a^{I_n+n-1}\, | + (I_2+1)|\, a^{I_1} a^{I_2} a^{I_3+2} \cdots a^{I_n+n-1}\, | + \cdots$;
en particulier, $\sum \partial_a\big(\Delta(\mathbb{A})\big) = 0$. La formule de Leibniz nous indique donc que

$$\sum \partial_a\big(S_I(\mathbb{A})\big) = I_1 S_{I-100\cdots}(\mathbb{A}) + (I_2{+}1) S_{I-010\cdots}(\mathbb{A}) \ + \cdots + (I_n{+}n{-}1) S_{I-\cdots 001}(\mathbb{A}) \ . \tag{3.1}$$

Pour simplifier cette action, on est conduit à définir l'opérateur linéaire de normalisation ϑ sur la base des fonctions de Schur par

$$\vartheta\big(S_I(\mathbb{A})\big) = \frac{det|\ a^{I_1}/I_1! \ \cdots a^{I_n+n-1}/(I_n+n-1)!\ |}{det|\, a^0/0! \cdots a^{n-1}/(n-1)!\, |} \quad . \tag{3.2}$$

Après simplification, on a en fait, dans le cas d'une partition I

$$\vartheta\big(S_I(\mathbb{A})\big) = S_I(\mathbb{A}) \,/ \prod\nolimits_{\square\in\, diagr(I)} (n + c_\square) \tag{3.3}$$

où les $c_\square$ sont les distances (avec signe) à la diagonale des boîtes $\square$ du diagramme de I ([Macd, I-1] dit *content*). Ainsi, pour $I = 1344$, on a

-3			
-2	-1	0	
-1	0	1	2
0	1	2	3

Contents

$n{-}3$			
$n{-}2$	$n{-}1$	0	
$n{-}1$	n	$n{+}1$	$n{+}2$
n	$n{+}1$	$n{+}2$	$n{+}3$

Coefficients

Les coefficients dans l'action de $\sum \partial_a$ ont maintenant disparu: $\sum \partial_a\big(\vartheta S_I(\mathbb{A})\big) = \vartheta\big(\Theta S_I(\mathbb{A})\big)$, c'est-à-dire, on a le carré commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{Sym}\mathbb{A} & \xrightarrow{\Theta_{-1}} & \mathfrak{Sym}\mathbb{A} \\ {\scriptstyle\vartheta}\big\downarrow & & {\scriptstyle\vartheta}\big\downarrow \\ \mathfrak{Sym}\mathbb{A} & \xrightarrow{\nabla_{-1}} & \mathfrak{Sym}\mathbb{A} \end{array}$$

puisque l'opérateur Θ_{-1} envoie la fonction de Schur S_I sur la fonction gauche $S_{I/1} = S_{I-100\cdots} + S_{I-010\cdots} + \cdots + S_{I-\cdots 001}(\mathbb{A})$ (*cf.* [Macd]).

Pour un alphabet de cardinal infini, le noyau de Θ_{-1} a pour base les fonctions monomiales ψ_J,$1 \notin J$ (th. 4.5). Par image inverse, et en petit degré ($i.e.$ $|J| \le card(\mathbb{A})$), on obtient ainsi une base du noyau de ∇_{-1}. Par exemple, pour le cardinal 5, on a $\psi_{23} = S_{23} - S_{113} - S_{122} + 2S_{1112} - 2S_{11111}$, et donc, en disposant planairement les coefficients pour rappeler comment ils se lisent sur le diagramme des partitions , la fonction

$$S_{23}/\begin{smallmatrix}45\\567\end{smallmatrix} \; - S_{113}/\begin{smallmatrix}3\\4\\567\end{smallmatrix} \; - S_{122}/\begin{smallmatrix}3\\45\\56\end{smallmatrix} \; + 2S_{1112}/\begin{smallmatrix}2\\3\\4\\56\end{smallmatrix} \; - 2S_{11111}/\begin{smallmatrix}1\\ \vdots\\5\end{smallmatrix}$$

appartient au noyau de ∇_{-1}.

Les opérateurs ∇_{-k} pour $k > 1$ n'ont plus la propriété d'annuler le Vandermonde. En effet, $\frac{1}{\Delta}\nabla_{-k}(\Delta) = \sum_{i<j} \frac{1}{a_i - a_j}\nabla_{-k}(a_i - a_j) = -\sum_{i<j}(a_i^{1-k} - a_j^{1-k})/a_i a_j(a_i^{-1} - a_j^{-1})$, et donc, en notant $A^\vee$ l'alphabet $\{a^{-1}\}_{a\in\mathbb{A}}$, on a

$$(3.4) \qquad k \ge 1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{\Delta}\nabla_{-k}(\Delta) = -\sum_{1\le p\le q, p+q=k} \psi_{p\,q}(\mathbb{A}^\vee)\ .$$

MacMahon [McM 1] étudie plus généralement les fonctions $S_k^{(r)} = \sum \psi_I$,$\ell(I) = r$,$|I| = k$.

La formule précédente nous permet de calculer l'action des ∇_{-k} sur la base des fonctions de Schur à partir de l'expression de $\nabla_{-k}(S_I \cdot \Delta)$. Pour éliminer les termes provenant de $\nabla_{-k}(\Delta)$, on est amené à définir les opérateurs suivants (pour $0 < k < n/2$):

$$(3.5) \qquad \begin{aligned} L_k = \nabla_{-k} \qquad\qquad & +\varepsilon\,\big(\frac{1}{2}D_{\psi^{k/2}}D_{\psi^{k/2}} - \psi^{k/2}(\mathbb{A}^\vee)D_{\psi^{k/2}}\big) \\ + \sum_{1\le<\le q, p+q=k} \; & \big(D_{\psi^p}D_{\psi^q} - \psi^p(\mathbb{A}^\vee)D_{\psi^q} - \psi^q(\mathbb{A}^\vee)D_{\psi^p}\big)\ , \end{aligned}$$

avec $\varepsilon = 1$ ou 0 selon que k est pair ou non, et en écrivant D_{ψ^q} pour $q\partial_{\psi^q}$.

Un calcul facilité par l'usage des opérateurs de symétrisation et que nous reportons pour cette raison en (7.10) donne l'expression explicite suivante de l'action des opérateurs L_k:

PROPOSITION (3.6). — *Soient* $\mathbb{A}$ *un alphabet de cardinal* n, I *dans* $\mathbb{N}^n$, k *un entier positif, tels que* $n > k + |I|$. *Alors* $L_k\big(S_I(\mathbb{A})\big) = (I_1 + 1 - \frac{k+1}{2})S_{I-k0\cdots 0}(\mathbb{A}) + (I_2 + 2 - \frac{k+1}{2})S_{I-0k0\cdots 0}(\mathbb{A}) + \cdots + (I_n + n - \frac{k+1}{2})S_{I-0\cdots 0k}(\mathbb{A})$.

Par ailleurs, les expressions (3.5) donnent instantanément la décomposition des opérateurs L_k, $0 < k < card(\mathbb{A})$, dans la base des D_{ψ^i}:

$$L_k = \frac{\varepsilon}{2} D_{\psi^{k/2}} D_{\psi^{k/2}} + \sum_{1 \le p < q, p+q=k} D_{\psi^p} D_{\psi^q} + \psi_0 D_{\psi^k} + \psi_1 D_{\psi^{k+1}} + \cdots \psi_{n-k} D_{\psi^n}\,.$$

Considérant ψ_0 comme un paramètre arbitraire : $\psi_0 = \mu$, on peut faire tendre le cardinal de $\mathbb{A}$ vers l'infini, et poser, pour $k > 0$:

(3.7)
$$\begin{cases} L_k^{(\mu)} = \frac{\varepsilon}{2} D_{\psi^{k/2}} D_{\psi^{k/2}} + \sum_{1 \le p < q, p+q=k} D_{\psi^p} D_{\psi^q} + \sum_{j \ge 1} \psi^j D_{\psi^{k+j}} \\ L_0^{(\mu)} = \frac{1}{2}\mu^2 + \sum_{j \ge 1} \psi^j D_{\psi^j} \\ L_{-k}^{(\mu)} = \frac{\varepsilon}{2} \psi^{k/2} \psi^{k/2} + \sum_{1 \le p < q, p+q=k} \psi^p \psi^q + \sum_{j \ge 1} \psi^{k+j} D_{\psi^j} \end{cases}$$

Ces opérateurs forment une représentation de l'algèbre de Virasoro (*cf* [Kac] et [K&R]). Nous les avons obtenus ici comme une déformation des opérateurs ∇_k.

Il est immédiat sur l'expression (3.7) que ces opérateurs vérifient les relations de commutation:

$$\big[L_k^{(\mu)}, L_h^{(\mu)}\big] = (k-h) L_{k+h}^{(\mu)} + \delta_{k,-h} \frac{k^3 - k}{12}\,, \tag{3.8}$$

avec $\delta_{k,-h} = 1$ ou 0 selon que $k = -h$ ou non, le seul ingrédient demandant calcul étant le scalaire $(k^3 - k)/12$.

La proposition (3.6) reste valable, à condition de distinguer n et μ:

$$\begin{aligned} I \in \mathbb{N}^n, k > 0 \ \Rightarrow L_k\big(S_I(\mathbb{A})\big) &= (I_n + \mu - \frac{k+1}{2}) S_{I-0\cdots 0k}(\mathbb{A}) \\ &+ (I_{n-1} + \mu - 1 - \frac{k+1}{2}) S_{I-0\cdots 0k0}(\mathbb{A}) \\ &+ \cdots + (I_1 + \mu - n + 1 - \frac{k+1}{2}) S_{I-k0\cdots 0}(\mathbb{A}) \end{aligned} \tag{3.9}$$

Les “vecteurs singuliers” pour cette représentation de l’algèbre de Virasoro sont les fonctions symétriques S telles que $L_k^{(\mu)}(S) = 0$ pour tout $k > 0$. Tenant compte des relations de commutation (3.8), on détermine ces vecteurs à l’aide du lemme suivant (*cf* [K&R]) – nous pouvons apporter la précision à la remarque de ces auteurs “proof by a direct and lengthy computation” que la longueur en cause est de trois lignes.

Lemme (3.10). — *Soit $\mu \in \mathbb{Z}$. Alors pour tout entier $n \geq 0$, on a les nullités*

$$L_1^{(\mu)}\big(S_{(n-\mu)^n}\big) = 0 \quad \& \quad \big(L_2^{(\mu)} + \frac{1}{2} D_{\psi^1} D_{\psi^1}\big)\big(S_{(n-\mu)^n}\big) = 0$$

Preuve : Dans la somme 3.9 pour $L_1^{(\mu)}$, il y a une seule fonction de Schur non nulle, $S_{\square-10\cdots0}$, qui est affectée du coefficient $(n-\mu)+\mu-n$. On a de même $L_2^{(\mu)}(S_\square) = -\frac{1}{2} S_{\square-20\cdots0} + \frac{1}{2} S_{\square-020\cdots}$, termes qui s’éliminent avec $\frac{1}{2} D_{\psi^1} D_{\psi^1}(S_\square)$, sachant que $S_{\square-020\cdots} = -S_{\square-110\cdots}$ $\square$

MacMahon [McM 5] donne une algèbre de Lie d’opérateurs à 4 paramètres généralisant les ∇_k.

4 . Produit scalaire. — Les différentes symétries des matrices de changement de base de fonctions symétriques d’un alphabet infini $\mathbb{A}$ obtenues par Cayley, Kostka &c. s’interprètent (*cf* [Macd I.4]) en munissant l’espace des polynômes symétriques $\mathfrak{Sym}(\mathbb{A})$ d’un produit scalaire $(\ ,\ )_{\mathbb{A}}$ pour lequel

- les fonctions de Schur sont orthogonales,
- les fonctions monomiales ψ_I sont adjointes des produits de fonctions complètes,
- les produits de fonctions sommes de puissance ψ^I sont orthogonales.

Bien plus, l’adjoint de la multiplication par toute fonction symétrique $S(\mathbb{A})$, que nous noterons $D_{S(\mathbb{A})}$, peut s’écrire comme un opérateur différentiel. En effet, $i\partial_{\psi^i(\mathbb{A})}$ est l’adjoint de la multiplication par $\psi^i(\mathbb{A})$; c’est donc $D_{\psi^i(\mathbb{A})}$ (*cf* [Macd I.5, ex 3]). L’opérateur adjoint d’une fonction symétrique quelconque $S(\mathbb{A}) = \sum \big(S\,,\psi^I\big)_{\mathbb{A}}\, \psi^I(\mathbb{A}) \,/\, \big(\psi^I\,,\psi^I\big)_{\mathbb{A}}$ s’écrit donc par linéarité :

(4.1) $$D_{S(\mathbb{A})} = \sum \big(S\,,\psi^I\big)_{\mathbb{A}}\, D_{\psi^I(\mathbb{A})} \,/\, \big(\psi^I\,,\psi^I\big)_{\mathbb{A}} \quad ,$$

somme sur toutes les partitions I.

Les *Opérateurs de Hammond* sont les opérateurs adjoints de la multiplication par les fonctions élémentaires ou les fonctions complètes. Comme

$\sum z^i S_i(\mathbb{A}) = \exp\big(\sum z^k \psi^k(\mathbb{A})/k\big)$, on peut à la suite de MacMahon [McM 2] écrire

$$\sum z^i\, D_{S^i(\mathbb{A})} = \exp\big(\textstyle\sum_{k\geq 1} z^k\, D_{\psi^k(\mathbb{A})}\big) \quad . \tag{4.2}$$

Les opérateurs différentiels utilisés aux paragraphes précédents se réécrivent sans difficultés (*cf* [McM 3]):

(4.3)
$$\begin{aligned}
\Theta_{-r} &= \partial_{\Lambda^r} + \Lambda^1\partial_{\Lambda^{r+1}} + \Lambda^2\partial_{\Lambda^{r+2}} + \cdots = (-1)^{r-1}D_{\psi^r} \ ,r \geq 1\ , \\
(-1)^{r-1}\partial_{\Lambda^r} &= D_{\psi^r} + S^1 D_{\psi^{r+1}} + S^2 D_{\psi^{r+2}} + \cdots \ ,r \geq 1\ , \\
\Omega_{-r} &= D_{\psi^r} - \big(\psi^1 D_{\psi^{r+1}} + \psi^2 D_{\psi^{r+2}} + \cdots, r \geq 1 \quad , \\
\nabla_k &= \psi^{k+1} D_{\psi^1} + \psi^{k+2} D_{\psi^2} + \psi^{k+3} D_{\psi^3} + \cdots, k \in \mathbb{Z} \quad .
\end{aligned}$$

Pour $k \geq 1$, les identités 1.2 : $\nabla_k(\Lambda^j) = \psi_{1^{j-1}k+1}$ impliquent que

$$\nabla_k = \sum_{j\geq 1} \psi_{1^{j-1}k+1}\, \partial_{\Lambda^j} = \sum_{i\geq 0, j\geq 1} (-1)^j \psi_{1^{j-1}k+1}\, S^i\, D_{\psi^{i+j}} \ ,k \geq 1 \quad .$$

Le calcul différentiel se trouve maintenant remplacé par des multiplications par les fonctions symétriques (pour lesquelles on dispose de techniques combinatoires variées, utilisant en particulier les *tableaux de Young*). Il faut toutefois noter que dans le cas d'un alphabet fini, l'expression ci-dessus des opérateurs $\Theta_r, \Omega_r, \nabla_r$ n'est plus vraie, des termes complémentaires s'introduisant.

L'action des opérateurs de Hammond sur les fonctions monomiales consiste en ce que Cayley [Cay 2] appelle *décapitation* en hommage à la Révolution française. Pour une partition $J = 1^{m_1} \cdots i^{m_i} \cdots$ et un entier i tel que $m_i \geq 1$, notons $J \setminus i$ la partition $J \setminus i = 1^{m_1} \cdots i^{m_i - 1} \cdots$. Le lemme suivant était connu de Cayley et MacMahon.

Lemme (4.4). — *Soit $\mathbb{A}$ un alphabet infini. Alors pour tout entier positif i, toute partition J, $D_{S^i}\big(\psi_J\big) = \psi_{J\setminus i}$ ou 0 selon que i est une part de J ou non.*

Comme $S^1 = \psi^1$ (et donc $D_{S^1} = D_{\psi^1}$), utilisant le changement d'alphabet $\mathbb{A} \to \mathbb{C}$ et l'identité $D_{S^1(\mathbb{A})} = \Omega_{-1,\mathbb{C}}$, on tire du lemme précédent la caractérisation suivante des fonctions semi-invariantes due à [McM 3]. — voir aussi la preuve de [Sy 1] :

Théorème 4.5 (McMahon). — *Soient* $\mathbb{A}$ *et* $\mathbb{C}$ *deux alphabets de cardinal* n*, liés par les relations* $\Lambda^i\mathbb{C} = i!\Lambda^i\mathbb{A}$*. Alors l'espace vectoriel des polynômes annulés par* $\Omega_{-1,\mathbb{C}}$ *a pour base les fonctions monomiales* $\psi_J(\mathbb{A}), J \not\ni 1$ *dans le cas où* n *est infini. Lorsque* n *est fini, cet espace a pour générateurs les polynômes en* $\psi_2(\mathbb{A}), \ldots, \psi_n(\mathbb{A})$*.*

Les calculs impliquant le produit scalaire sur l'anneau des polynômes symétriques sont facilités par ce que le capitaine MacMahon [McM 4] a appelé "Lois de Réciprocité". On retrouve ces lois en considérant un alphabet supplémentaire $\mathbb{X}$ de cardinal infini et en munissant l'espace $\mathfrak{Sym}(\mathbb{A}) \otimes \mathfrak{Sym}(\mathbb{X})$ du produit scalaire produit :

$$\big(S(\mathbb{A})T(\mathbb{X})\,,S'(\mathbb{A})T'(\mathbb{X})\big)_{\mathbb{A}\otimes\mathbb{X}} = \big(S(\mathbb{A})\,,S'(\mathbb{A})\big)_{\mathbb{A}} \cdot \big(T(\mathbb{X})\,,T'(\mathbb{X})\big)_{\mathbb{X}}$$

pour tout quadruple de fonctions symétriques S,S',T,T'. Choisissant deux bases de $\mathfrak{Sym}(\mathbb{A})$ et $\mathfrak{Sym}(\mathbb{X})$, on définit pour ces bases $D_{S(\mathbb{A})T(\mathbb{X})}$ comme le produit d'opérateurs $D_{S(\mathbb{A})}D_{T(\mathbb{X})}$ et l'on étend par linéarité la définition de D_S à tout élément S dans $\mathfrak{Sym}(\mathbb{A}) \otimes \mathfrak{Sym}(\mathbb{X})$. Il est immédiat de vérifier qu'est préservée la propriété d'adjonction :

Lemme (4.6). — *Soient* $\mathbb{A}$ *et* $\mathbb{X}$ *de cardinal infini. Alors pour tout* S *dans* $\mathfrak{Sym}(\mathbb{A}) \otimes \mathfrak{Sym}(\mathbb{X})$*,* D_S *est adjoint de la multiplication par* S*.*

Notons $|_{\mathbb{X}=\mathbb{A}}$ la spécialisation de $\mathbb{X}$ en $\mathbb{A}$ et $\mathbb{A}+\mathbb{X}$ l'alphabet union de $\mathbb{A}$ et $\mathbb{X}$.

Proposition (4.7). — *Pour tout triple de fonctions symétriques* S,P,Q*, on a*

$$D_{S(\mathbb{A})}\big(P(\mathbb{A})Q(\mathbb{A})\big) = D_{S(\mathbb{A}+\mathbb{X})}\big(P(\mathbb{A})Q(\mathbb{X})\big)\big|_{\mathbb{X}=\mathbb{A}}$$

Démonstration. — Par linéarité, il suffit de prouver la formule dans le cas $S = \psi^H, P = \psi^I, Q = \psi^J$, pour tout triple de partitions I,J,H. L'anneau $\mathfrak{Sym}(\mathbb{A}) \otimes \mathfrak{Sym}(\mathbb{X})$ étant le produit tensoriel des anneaux en une indéterminée $\mathbb{C}[\psi^i(\mathbb{A})]$ et $\mathbb{C}[\psi^j(\mathbb{X})]$ et le produit scalaire étant le produit direct de sa restriction à chacun de ces anneaux, il suffit en fait d'examiner le cas où $I = i^\alpha$, $J = i^\beta$, $H = i^\gamma$. Puisque $\psi^i(\mathbb{A}+\mathbb{X}) = \psi^i(\mathbb{A}) + \psi^i(\mathbb{X})$, on a $D_{S(\mathbb{A}+\mathbb{X})}\big(\psi^I(\mathbb{A})\psi^J(\mathbb{X})\big) = \big(D_{\psi^i(\mathbb{A})} + D_{\psi^i(\mathbb{X})}\big)^\gamma\big((\psi^i(\mathbb{A}))^\alpha(\psi^i(\mathbb{X}))^\beta\big)$. On conclut à l'aide de $\big(D_{\psi^i(\mathbb{A})}\big)^\gamma\big((\psi^i(\mathbb{A}))^\alpha\big) = i^\gamma\alpha\cdots(\alpha-i+1)\big(\psi^i(\mathbb{A})\big)^{\alpha-\gamma}$ $\square$

On trouvera dans [Thi] une interprétation de ces propriétés du produit scalaire en terme d'algèbre de Hopf.

Remarque. — Dans le cas où S,P,Q sont homogènes et où $d^o(S) = d^o(P) + d^o(Q)$, la fonction $D_S(PQ)$ est une constante et l'on n'a pas besoin de la spécialisation $\mathbb{X} = \mathbb{A}$. Ce cas particulier est abondamment utilisé par

MacMahon [McM4] pour décomposer des produits de fonctions symétriques par des fonctions monomiales, ou décrire les "syzygies" entre semi-invariants. Plus généralement d'ailleurs, MacMahon étend les propriétés des fonctions symétriques à l'anneau des polynômes dits de Laurent : les fonctions monomiales sont maintenant l'orbite sous le groupe symétrique d'un monôme ayant des exposants dans $\mathbb{Z}$ et plus seulement dans $\mathbb{N}$.

5. Covariants. — On peut généraliser la notion de semi-invariant en considérant simultanément plusieurs alphabets.

Définition. — Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{X}$ deux alphabets. une fonction symétrique en $\mathbb{A}$ et symétrique en $\mathbb{X}$ est dite *covariante* si elle est invariante pour toute translation $\mathbb{A} \to \mathbb{A}^{+\varepsilon}$,$\mathbb{X} \to \mathbb{X}^{+\varepsilon}$. Nous devrions plus exactement dire *semi-covariante*, n'ayant utilisé que le groupe des translations.

On a la même caractérisation différentielle qu'en 1.1 en considérant le coefficient de ε^1:

Lemme 5.1. — *La fonction bisymétrique $f(\mathbb{A},\mathbb{X})$ est covariante ssi elle est annulée par l'opérateur différentiel $\sum_{a\in\mathbb{A}} \partial_a - \sum_{x\in\mathbb{X}} \partial_x$.*

Le cas le plus classique est celui où $\mathbb{X}$ est réduit à un élément: $\mathbb{X} = \{x\}$. Le candidat suivant est le *résultant* $\prod_{a\in\mathbb{A},\, x\in\mathbb{X}}(a-x)$ qui soustend toute la théorie de l'élimination au $19^{\text{ième}}$ siècle. L'étude du résultant conduit, et nous n'aborderons pas ce domaine, aux fonctions symétriques d'une différence d'alphabets (au sens des λ-anneaux), dites aussi *supersymétriques* – *cf* [Pra]. Nous préférons ici nous restreindre aux méthodes différentielles utilisées en théorie de l'élimination.

On peut bien entendu effectuer sur $\mathbb{A}$ et $\mathbb{X}$ séparément toutes les transformations étudiées ci-dessus, de sorte à modifier l'expresssion de l'opérateur dont les covariants sont le noyau.

Par exemple, un covariant bien connu, associé au polynôme $P(x,y) = \prod_{a\in\mathbb{A}}(x+ay)$ est le Hessien $\begin{vmatrix} \partial_x\partial_x P & \partial_x\partial_y P \\ \partial_y\partial_x P & \partial_y\partial_y P \end{vmatrix}$, que l'on trouve sans difficulté, en posant $P(x,y) = \Lambda^n(nx + \mathbb{B}y)$ et en notant nx pour l'alphabet de cardinal n dont tous les éléments sont égaux à x, être égal à $-n^2(n-1)^2\, y^{-2}\, \Lambda_{n-1\, n-1}\big((n-2)x + \mathbb{B}y\big)$.

Donnons une famille plus générale de covariants.

Proposition 5.2. — *Soient trois entiers positifs k,r,p tels que $r+p = k+1$, $\mathbb{A}$ un alphabet de cardinal n, $\mathbb{B}$ l'alphabet correspondant : $\Lambda^i\mathbb{A} = \binom{n}{i}\Lambda^i\mathbb{B}$ pour tout i, et enfin soit x une indéterminée. Alors $S_{r^k}(px+\mathbb{B})$ est un covariant.*

Démonstration. — On réclame l'annulation par l'opérateur $\sum_{a\in\mathbb{A}} \partial_a - \partial_x = (n+1)\partial_{\psi^1(\mathbb{B})} - \sum_{b\in\mathbb{B}} \partial_b - \partial_x$. Or pour dériver par rapport à x une fonction de $px = \{x,\dots,x\}$, on peut tout aussi bien considérer un alphabet $\mathbb{X} = \{x_1,\dots,x_p\}$ de cardinal p et remplacer ∂_x par $\partial_{x_1} + \cdots + \partial_{x_p}$. En d'autres termes, si f est une fonction symétrique en p variables, alors $\partial_x f(x,\dots,x) = \big(\partial_{x_1} + \cdots \partial_{x_p}\big) f(x_1,\dots,x_p)\big|_{x_i=x}$.

On a donc à montrer l'annulation de $S_{r^k}(\mathbb{X}+\mathbb{B})$ par l'opérateur $(n+1)\partial_{\psi^1(\mathbb{B})} - \sum_{b\in\mathbb{B}} \partial_b - \sum_{x\in\mathbb{X}} \partial_x$. Utilisant l'alphabet $\mathbb{Y} = \mathbb{B}+\mathbb{X}$, et profitant de ce que $\partial_{\psi^1(\mathbb{B})} = \partial_{\psi^1(\mathbb{Y})}$, on est en fait restreint à calculer l'image de $S_{r^k}(\mathbb{Y})$ par $(n+1)\partial_{\psi^1(\mathbb{Y})} - \sum \partial_y$, qui est $(n+1)S_{r^k/1}(\mathbb{Y}) - (r+n+p-k)S_{r-1\, r\cdots r}(\mathbb{Y})$. L'hypothèse sur k,p,r implique la nullité, avant même la spécialisation $x_1 = x = \cdots = x_p$ $\square$

Nous examinerons un autre covariant, associé au discriminant.

Proposition 5.3. — *Soit $\mathbb{B}$ un alphabet de cardinal n, $\mathbb{X} = \{x,y\}$ un alphabet de cardinal 2, $P(x)$ le polynôme $\Lambda^n(nx+\mathbb{B})$. Soit $Q(x,y) = \frac{n}{x-y}\big(P(x)P'(y) - P'(x)P(y)\big) - P'(x)P'(y)$. Alors Q est un covariant, i.e. est annulé par $\heartsuit := (n+1)\partial_{\psi^1(\mathbb{B})} - \sum \partial_x - \sum \partial_y$.*

Démonstration. — Comme $P'(x) = n\Lambda^{n-1}\big((n-1)x+\mathbb{B}\big)$, on trouve que $n^{-2}Q(x,y) = \frac{1}{x-y}\begin{vmatrix} \Lambda^n\big((n-1)x+\mathbb{B}\big) & \Lambda^n\big((n-1)y+\mathbb{B}\big) \\ \Lambda^{n-1}\big((n-1)x+\mathbb{B}\big) & \Lambda^{n-1}\big((n-1)y+\mathbb{B}\big) \end{vmatrix}$.

Remarquant que $(x-y)^{-1}$ commute avec $\partial_x + \partial_y$, donc avec $\heartsuit$, on veut donc montrer l'annulation de $(x-y)n^{-2}Q(x,y)$. Or la double nullité $\heartsuit\Big(\Lambda^{n-1}\big((n-1)x+\mathbb{B}\big)\Big) = 0 = \heartsuit\Big(\Lambda^{n-1}\big((n-1)y+\mathbb{B}\big)\Big)$ est le cas particulier $k = n-1, r = 1, p = n-1$ de la proposition 5.2. En outre, $\heartsuit\Big(\Lambda^n\big((n-1)x+\mathbb{B}\big)\Big) = \big((n+1)-n\big)\Lambda^{n-1}\big((n-1)x+\mathbb{B}\big)$ et donc l'image du déterminant $\begin{vmatrix} \Lambda^n & \Lambda^n \\ \Lambda^{n-1} & \Lambda^{n-1}\end{vmatrix}$ par $\heartsuit$ est donc nulle $\square$

Dans la base des fonctions de Schur en x,y, le polynôme $Q(x,y)$ s'écrit

(5.4)
$$Q(x,y) = n^2 \sum_{0\le i\le j\le n-1} \binom{n-1}{i-1}\binom{n-1}{j} S_{1^i+1^j}(\mathbb{B}) S_{n-1-i\;\, n-1-j}(x+y)$$

Remarque. — L'idée de considérer la résultante de deux polynômes ou le discriminant d'un polynôme (en une variable) comme une forme quadratique sur l'espace vectoriel des polynômes en x et y à coefficients les fonctions symétriques, est dûe à Cayley. On retrouve la résultante ou le discriminant usuel en prenant le déterminant de cette forme quadratique. Ainsi, pour $n = 3$,

$\frac{x-y}{9}Q(x,y) = \begin{vmatrix} \Lambda^3\big(2x+\mathbb{B}\big) & \Lambda^3\big(2y+\mathbb{B}\big) \\ \Lambda^2\big(2x+\mathbb{B}\big) & \Lambda^2\big(2y+\mathbb{B}\big)\end{vmatrix} = \big(\Lambda_{32}(\mathbb{B}) + (2x-2y)\Lambda_{22}(\mathbb{B}) +$

$(x^2-y^2)\Lambda_{12}(\mathbb{B}) + 4xy\Lambda_{21}(\mathbb{B}) + (2x^2y - 2xy^2)\Lambda_{11}(\mathbb{B}) + x^2y^2\Lambda_{10}(\mathbb{B})\big)$
$= 2\Lambda_{22}(\mathbb{B}) + (x+y)\Lambda_{12}(\mathbb{B}) + xy\Lambda_{11}(\mathbb{B})$.

Le déterminant $\begin{vmatrix} 2\Lambda_{22}\mathbb{B} & \Lambda_{12}\mathbb{B} \\ \Lambda_{12}\mathbb{B} & 2\Lambda_{11}\mathbb{B} \end{vmatrix}$ est égal à

$$\begin{vmatrix} 2\Lambda^{22}\mathbb{B} - 2\Lambda^{13}\mathbb{B} & \Lambda^{12}\mathbb{B} - \Lambda^{3}\mathbb{B} \\ \Lambda^{12}\mathbb{B} - \Lambda^{3}\mathbb{B} & 2\Lambda^{11}\mathbb{B} - \Lambda^{2}\mathbb{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2}{9}\Lambda^{22}\mathbb{A} - \frac{2}{3}\Lambda^{13}\mathbb{A} & \frac{1}{9}\Lambda^{12}\mathbb{A} - \Lambda^{3}\mathbb{A} \\ \frac{1}{9}\Lambda^{12}\mathbb{A} - \Lambda^{3}\mathbb{A} & \frac{2}{9}\Lambda^{11}\mathbb{A} - \frac{2}{3}\Lambda^{2}\mathbb{A} \end{vmatrix}$$

$= \frac{1}{27}\big(\Lambda^{1122}\mathbb{A} - 4\Lambda^{222}\mathbb{A} - 4\Lambda^{1113}\mathbb{A} + 18\Lambda^{123}\mathbb{A} - 27\Lambda^{33}\mathbb{A}\big)$. C'est bien l'expression du discriminant du polynôme $\prod_{a\in\mathbb{A}}(x+a) = \Lambda^3(3x+\mathbb{B})$ classiquement donnée par les bons livres d'algèbre [Bou, IV.6].

Par extension, nous dirons que la fonction $Q(x,y) \in \mathfrak{Sym}(\mathbb{A})[x,y]$ est le discriminant du polynôme $\prod_{a\in\mathbb{A}}(x+a)$

6 . Opérateurs différentiels associés aux covariants. —

L'idéee fondamentale sous-tendant le "Calcul Symbolique" développé principalement par l'école allemande à la fin du siècle dernier consiste à transformer les covariants en opérateurs différentiels que l'on s'empresse de faire agir sur les covariants.

Au lieu de "symboles" ou d'"ombres", nous considérerons deux indéterminées x,y, un alphabet $\mathbb{B}$ de cardinal n et emploierons un morphisme de l'anneau $\mathfrak{Sym}\mathbb{B}[x,y]$ des polynômes en x,y, à coefficients symétriques en $\mathbb{B}$, dans le module des opérateurs différentiels à coefficients dans $\mathfrak{Sym}\mathbb{B}$, Ce morphisme, noté ξ, est défini par

$$(6.1) \qquad \xi\big(\sum Q_{ij}\, x^{n-i}y^{n-j}\big) = \sum Q_{ij}\, \partial_{\Lambda^i}\partial_{\Lambda^j} = \sum Q_{ij}\, \partial_{\Lambda^{ij}} \ .$$

On a au paragraphe précédent défini les covariants comme les éléments de $\mathfrak{Sym}\mathbb{B}[x,y]$ symétriques en x,y et annulés par l'opérateur $\Omega_{-1} - \partial_x - \partial_y$, où $\Omega_{-1} = \Omega_{-1,\mathbb{B}} = (n+1)\partial_{\psi^1\mathbb{B}} - \sum \partial_b = \partial_{\Lambda^1\mathbb{B}} + 2\Lambda^1\mathbb{B}\,\partial_{\Lambda^2\mathbb{B}} + \cdots$.

La compatibilité du morphisme ξ avec Ω_{-1} peut s'exprimer par la propriété immédiate suivante :

Lemme (6.2). — *Pour tout $Q \in \mathfrak{Sym}[x,y]$, le commutateur* $\big[\xi(Q)\,, \Omega_{-1} - \partial_x - \partial_y\big]$ *est égal à* $\xi\big([Q\,, \Omega_{-1} - \partial_x - \partial_y]\big)$.

Corolllaire (6.3). — *Soit Q un covariant et f un polynôme dans $\mathbb{C}[x,y]$. Alors*

$$\big[\xi(fQ)\,,\Omega_{-1}\big] = \xi\big((\partial_x f + \partial_y f)Q\big) \quad .$$

Comme application de ces méthodes, nous donnerons en exemple le très intéressant résultat de Bacry [Ba] que les fonctions de Schur sont fonctions propres de l'opérateur associé au discriminant.

Etant donné un alphabet $\mathbb{A}$ de cardinal n, on peut se proposer de caractériser les opérateurs différentiels du deuxième ordre

$$\heartsuit = \sum\nolimits_{i,j\neq 0} Q_{ij}\,\partial_{\Lambda^{ij}} + \sum\nolimits_{i\neq 0} Q_i\,\partial_{\Lambda^i} \quad ,$$

où $Q_{ij} \in \mathfrak{Sym}(\mathbb{A})$, qui ont les fonctions de Schur comme fonctions propres. En d'autres termes, il existe une application $\theta : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$ telle que pour tout I dans $\mathbb{Z}^n$, notant ρ le vecteur $(0,1,\ldots,n-1)$, on a

$$\heartsuit S_{I-\rho}(\mathbb{A}) = \theta(I)\, S_{I-\rho}(\mathbb{A}) \ . \tag{6.4}$$

Tenant compte de ce que $S_{I-\rho} = \pm S_{J-\rho}$ si le vecteur J est obtenu par permutation des composantes de I (ce qui correspond à une permutation des colonnes dans l'expression déterminantale de $S_{I-\rho}$), on a donc que $\theta(I)$ est une fonction symétrique des composantes $I_1,\ldots,I_n$ de I.

Prenant deux indéterminées supplémentaires u,v et posant $P(u) = \prod_{a\in\mathbb{A}}(u+a) = \Lambda^n(nu+\mathbb{B})$, on trouve que pour tout S dans $\mathfrak{Sym}(\mathbb{A})$, l'hypothèse que $\heartsuit$ est du deuxième ordre implique

$$\big[[\heartsuit,P(u)],P(v)\big]S = S\cdot \sum Q_{ij}\,\partial_{\Lambda^{ij}} P(u)P(v) \ . \tag{6.5}$$

Par ailleurs, le produit d'une fonction de Schur $S_{I-\rho}$, $I\in\mathbb{N}^n$, par une fonction élémentaire Λ^k est décrit par la formule de Pieri :

$$\Lambda^k \cdot S_{I-\rho} = \sum\nolimits_{\varepsilon} S_{I-\rho+\varepsilon} \ , \tag{6.6}$$

somme sur tous les vecteurs $\varepsilon \in \{0,1\}^n, |\varepsilon| := \varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_n = k$.

Utilisant la formule de Pieri pour développer (6.5), on obtient la condition nécessaire suivante pour que $\heartsuit$ vérifie (6.4) :

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon,\eta \in \{0,1\}^n, \text{le nombre } \theta(I+\varepsilon+\eta) \\ &-\theta(I+\varepsilon)-\theta(I+\eta)+\theta(I) \text{ne dépend pas de } I\in\mathbb{N}^n \end{aligned} \tag{6.7}$$

Inversement, les coefficients de l'opérateur $\heartsuit$ sont déterminés par les valeurs $\theta(I)$ pour $I \in \{0,1,\ldots,n{+}1\}^n$ qui correspondent aux fonctions de Schur appartenant à l'espace vectoriel de base $\{\Lambda^{i\,j} : i,j \in \mathbb{N}\}$.

Plus précisément, utilisant que $\Lambda^i\Lambda^j = S_{1^i+1^j} + \cdots S_{1^{i+j}}$, où 1^i désigne le vecteur $\underbrace{0,\ldots,0}_{n-i},\underbrace{1,\ldots,1}_{i} \in \mathbb{N}^n$, on a, pour $1 \le i \le jn$

$$
\begin{aligned}
(6.8) \qquad Q_{ij} &= \theta(\rho+1^i+1^j)S_{1^i+1^j} + \theta(\rho+1^{i-1}+1^{j+1})S_{1^{i-1}+1^{j+1}} + \cdots \\
&+\theta(\rho+1^1+1^{i+j-1})S_{1^1+1^{i+j-1}} - \big(\theta(\rho+1^i)+\theta(\rho+1^j)\big)\Lambda^{ij} + \theta(\rho+1^{i+j})\Lambda^{i+j} \\
Q_i &= \theta(\rho+1^i)\,\Lambda^i
\end{aligned}
$$

En résumé, la proposition suivante caractérise les opérateurs différentiels du 2$^{\text{ième}}$ ordre ayant pour fonctions propres les fonctions de Schur:

Proposition (6.9). — *Soit n un entier, θ une fonction symétrique de $\mathbb{N}^n$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant la condition (6.7). Alors l'opérateur*

$$\heartsuit = \sum\nolimits_{i,j\neq 0} Q_{ij}\,\partial_{\Lambda^{ij}} + \sum\nolimits_{i\neq 0} Q_i\,\partial_{\Lambda^i} \quad ,$$

où les Q_{ij}, Q_i sont données par 6.8, a pour fonctions propres les fonctions de Schur $S_{I-\rho}$, $I \in \mathbb{N}^n$ et pour valeurs propres correspondantes les $\theta(I)$.

L'équation 6.7 indique que la fonction $\theta(I)$, si elle est analytique, est polynomiale de degré 2 au plus en chacune des composantes de I. La solution quadratique la plus naturelle est

$$\theta(I) = \sum\nolimits_{j<k}(I_j - I_k)^2 \; - c \,,$$

où la constante c est choisie telle que $\theta(\rho) = 0$ (on préfère en effet que les constantes soient fonctions propres pour la valeur propre 0).

Théorème 6.10 (Bacry). — *Soit n un entier, θ la fonction : $\mathbb{N}^n \ni I \to \theta(I) = \sum_{j<k}(I_j - I_k)^2 \; - c$, $Q = \sum Q_{ij}$ le discriminant tel que défini en 5.3, ξ le morphisme 6.1. Alors l'opérateur*

$$\heartsuit := n^2\xi(xyQ) + (n+1)\sum k(n-k)\Lambda^k\partial_{\Lambda^k}$$

a pour fonctions propres les fonctions de Schur et valeurs propres θ, i.e. pour tout I dans $\mathbb{N}^n$, on a

$$\heartsuit\,(S_{I-\rho}) = \theta(I)\,S_{I-\rho}$$

Preuve. — D'après la proposition 6.9, nous sommes limités à montrer que pour toute fonction de Schur $S_{1^i+1^j}$, $0 \le i,j \le n$ est fonction propre de $\heartsuit$, de valeur propre $\theta(\rho+1^i+1^j)$. Introduisant deux alphabets $\mathbb{A},\mathbb{B}$ de cardinal

n liés par $\Lambda^i\mathbb{A} = \binom{n}{i}\Lambda^i\mathbb{B}$, et le polynôme $P(u) = \Lambda^n(nu+\mathbb{B})$, on a que $P(u)P(v)$ est la fonction génératrice des fonctions de Schur $S_{1^i+1^j}(\mathbb{A})$ tout autant que des fonctions de Schur $S_{1^i+1^j}(\mathbb{B})$.

De l'expression 5.4, on tire

$$\tfrac{1}{2}n^{-2}\xi(xyQ)\,P(u)P(v) = \sum_{0\le i\le j\le n-1} \tbinom{n-1}{i-1}\tbinom{n-1}{j}\; S_{1^i+1^j}(\mathbb{B})\,S_{n-j\;n-i}(u+v)\,.$$

Le coefficient de $S_{n-j\;n-i}(u+v)$ dans $\heartsuit\big(P(u)P(v)\big)$ est donc $2n^2\binom{n-1}{i-1}\binom{n-1}{j}S_{1^i+1^j}(\mathbb{B})+(n+1)\big((ni+nj-i^2-j^2)\Lambda^{ij}(\mathbb{A})-(ni+nj-(i-1)^2-(j+1)^2)\Lambda^{i-1\,j+1}(\mathbb{A})\big)$. Il est bien égal au coefficient de $S_{n-j\;n-i}(u+v)$ dans $\sum_{0\le i\le j\le n-1}\theta(\rho+1^i+1^j)S_{1^i+1^j}(\mathbb{A})\,S_{n-j\;n-i}(u+v)$, puisque $S_{1^i+1^j}(\mathbb{A}) = \frac{n!}{i!(n+1-i!)}\frac{n!}{j!(n-j!)}\big((n+1-i)(j+1)S_{1^i+1^j}(\mathbb{B})+(n+1)(j+1-i)\Lambda^{i-1\,j+1}(\mathbb{B})\big)$ $\square$

Une preuve beaucoup plus détaillée se trouve dans [Bee] qui interprète l'opérateur comme la partie radiale de l'opérateur de Laplace-Beltrami sur certains espaces symétriques.

Exemple. — Pour $n=2$, l'opérateur est

$$4\xi(xyQ)+3\Lambda^1(\mathbb{B})\partial_{\Lambda^1(\mathbb{B})} = S_2(\mathbb{B})\partial_{\Lambda^{11}(\mathbb{B})}+3\Lambda^1(\mathbb{B})\partial_{\Lambda^1(\mathbb{B})}\ .$$

Pour n=3, d'après le calcul du paragraphe précédent, on a $9\xi(xyQ)+4\big(2\Lambda^1(\mathbb{B})\partial_{\Lambda^1(\mathbb{B})}+\Lambda^2(\mathbb{B})\partial_{\Lambda^2(\mathbb{B})}\big) = 2S_{22}(\mathbb{B})\partial_{\Lambda^{22}(\mathbb{B})}+2S_{12}(\mathbb{B})\partial_{\Lambda^{12}(\mathbb{B})}+2S_2(\mathbb{B})\partial_{\Lambda^{11}(\mathbb{B})}+8\Lambda^1(\mathbb{B})\partial_{\Lambda^1(\mathbb{B})}+8\Lambda^2(\mathbb{B})\partial_{\Lambda^2(\mathbb{B})} = \big(2\Lambda^{22}(\mathbb{A})-6\Lambda^{13}(\mathbb{A})\big)\partial_{\Lambda^{22}(\mathbb{A})}+\big(2\Lambda^{12}(\mathbb{A})-18\Lambda^3(\mathbb{A})\big)\partial_{\Lambda^{12}(\mathbb{A})}+\big(2\Lambda^{11}(\mathbb{A})-6\Lambda^2(\mathbb{A})\big)\partial_{\Lambda^{11}(\mathbb{A})}+8\Lambda^1(\mathbb{A})\partial_{\Lambda^1(\mathbb{A})}+8\Lambda^2(\mathbb{A})\partial_{\Lambda^2(\mathbb{A})}$.

Ainsi, $\heartsuit(S_{12}(\mathbb{A})) = 2\Lambda^{12}(\mathbb{A})-18\Lambda^3(\mathbb{A})+8(2\Lambda^{12}(\mathbb{A}) = 18S_{12}(\mathbb{A}) = \big(2^2+4^2+(4-2)^2-(1^2+2^2+(2-1)^2)\big)S_{12}(\mathbb{A}) = \theta(0{,}2{,}4)S_{12}(\mathbb{A})$.

7. Symétrisations. — On peut facilement obtenir des dérivations sur l'anneau des polynômes symétriques en un alphabet $\mathbb{A}$ par symétrisation de l'opérateur de dérivation ∂_a, où a est un élément quelconque de $\mathbb{A}$.

Soit $\mathbb{A}$ un alphabet totalement ordonné de cardinal n, a sa première lettre. Soit $\pi_{\mathbb{A}}$ l'opérateur sur l'anneau des polynômes de Laurent $\mathbb{Z}[\mathbb{A},\mathbb{A}^\vee]$ à valeurs dans $\mathfrak{Sym}(\mathbb{A})$:

$$\text{(7.1)}\quad \text{pour tout } I\in\mathbb{N}^n,\ \text{tout } k\in\mathbb{Z}\ ,\pi_{\mathbb{A}}\big(e^{I,\mathbb{A}}\cdot(\Lambda^n\mathbb{A})^k\big) := S_I(\mathbb{A})\cdot(\Lambda^n\mathbb{A})^k\ .$$

Des opérateurs plus généraux sont décrits par [L&S].

Soit Q un élément fixe quelconque de $\mathbb{Z}[\mathbb{A},\mathbb{A}^\vee]$. Alors l'opérateur

$$\mathfrak{Sym}(\mathbb{A},\mathbb{A}^\vee) \ni P \to \pi_{\mathbb{A}}\big(Q \cdot \partial_a(P)\big) \in \mathfrak{Sym}(\mathbb{A},\mathbb{A}^\vee)$$

est une dérivation puisque $\pi_{\mathbb{A}}$ admet les fonctions symétriques en $\mathbb{A}$ comme scalaires.

Les opérateurs de Cayley, Sylvester, MacMahon considérés dans ce texte sont de ce type.

Pour simplifier les notations, nous utiliserons la structure de λ-anneau de l'anneau des polynômes à coefficients réels. Plus précisément, on définit les opérateurs "Sommes de Puissance" , $k \geq 0$ par les formules :

$$\psi^k(\alpha u + \beta v + \gamma w + \cdots) = \alpha u^k + \beta v^k + \gamma w^k + \cdots$$

pour $\alpha,\beta,\ldots$ réels et $u,v,\ldots$ monômes. A l'aide de la décomposition de toute fonction symétrique S dans la base des produits de ψ^k, on identifie S à un opérateur sur l'anneau des polynômes. Un alphabet $\mathbb{A}$ doit être identifié à la somme de ses éléments: $\mathbb{A} = a + a' + \cdots$. La somme ou la différence de deux alphabets correspond à

$$\psi^k(\mathbb{A} \pm \mathbb{B}) = \psi^k(\mathbb{A}) \pm \psi^k(\mathbb{B}) \ .$$

Lemme (7.2). — *Soit* $\mathbb{A}$ *un alphabet de cardinal* n. *Les opérateurs* ∂_{Λ^k}, $n \geq k \geq 1$, D_{ψ^k}, $n \geq k \geq 1$, ∇_k, $n \geq k \geq -1$, Θ_r, $-1 \geq r$, Ω_r, $-1 \geq r$ *sont du type* $\pi_{\mathbb{A}}\big(Q \cdot \partial_a()\big)$, *avec les facteurs* Q *respectifs suivants :*

$(-a)^{-k+1}$, $(-a)^{-k+1}S^n(-\mathbb{A})$, $a^{k-n+1}S^{n-1}(2a-\mathbb{A})$, $(-a)^{1-n}\Lambda^{n+r}(\mathbb{A}-a)$, $(-1)^r a^{-n+1}\big(S^{n-r}(2a-\mathbb{A}) - (n+2-r)S^{n-r}(a-\mathbb{A})\big)$.

La vérification du lemme ne présente aucune difficulté; donnons à titre d'exemple ce qui concerne Θ_r:
L'image par ∂_a de $\Lambda^k(\mathbb{A}) = \Lambda^k(\mathbb{A}-a) + a\Lambda^{k-1}(\mathbb{A}-a)$ est $\Lambda^{k-1}(\mathbb{A}-a)$. Le produit $\Lambda^{n+r}(\mathbb{A}-a)\cdot\Lambda^{k-1}(\mathbb{A}-a)$ est égal à la somme de toutes les fonctions de Schur $S_{1^i2^j}(\mathbb{A}-a)$, $i+2j = n+r+k-1$, $j \leq inf(n-r,k-1)$. L'image par $\pi_{\mathbb{A}}$ de cette somme, multipliée par $(-a)^{1-n}$, est $(-1)^{n-1}\sum S_{1^i2^j\,1-n}(\mathbb{A})$; chacun de ces déterminants a sa première et dernière colonne identiques, sauf lorsque $i+j = n-1$, i.e. $j = r+k$, auquel cas $(-1)^{n-1}S_{1^i2^j\,1-n}(\mathbb{A}) = S_{0^{n-j}1^j}(\mathbb{A}) = \Lambda^{r+k}(\mathbb{A})$ $\square$

L'opérateur, sur l'anneau $\mathfrak{Sym}(\mathbb{A})[x]$ des polynômes en une variable x défini par

$$f \to \Pi_{\mathbb{A}}\big(S^{n-1}(x+a-\mathbb{A})\, a^{1-n}\, f(a)\big)$$

est un opérateur $\mathfrak{Sym}(\mathbb{A})$-linéaire de projection sur le sous-espace des polynômes de degré $\leq n-1$ en x. Ce n'est autre qu'un des nombreux avatars de l'interpolation de Lagrange. Moyennant cette identification, l'expression de Θ_r ci-dessus coïncide avec celle donnée par Sylvester [Sy 1].

MacMahon [McM 6] considère des opérateurs plus généraux que les Ω_r, où les coefficients $1,2,3\ldots = \{S^i(2)\}_{i\geq 0}$ sont remplacés apr les binomiaux $S^i(k)$. Ces opérateurs s'obtiennent à l'aide des $\pi_{\mathbb{A}}\big(S^i(ka-\mathbb{A})a^j\,\partial_a()\big)$.

Les opérateurs D_{S^k} et D_{Λ^k} peuvent aussi s'obtenir par symétrisation. En effet, soit $\mathbb{A}$ un alphabet de cardinal infini, z une indéterminée supplémentaire. Les opérateurs D_{S^k} et D_{Λ^k} sont donnés par les formules de Taylor, pour toute fonction symétrique S:

$$S(\mathbb{A}+z) = \sum z^k D_{S^k} S(\mathbb{A}) \tag{7.3}$$

$$S(\mathbb{A}-z) = \sum (-z)^k D_{\Lambda^k} S(\mathbb{A}) \ . \tag{7.4}$$

Notons comme ci-dessus $\pi_{\mathbb{A}}$ le morphisme : $\pi_{\mathbb{A}}(e^{I,\mathbb{A}}) = S_I(\mathbb{A}), \forall n, \forall I \in \mathbb{Z}^n$.

Lemme (7.5). — *Soit* $\mathbb{A} = \{a_1,a_2,\ldots\}$ *un alphabet de cardinal infini. Alors, pour tout* n, *tout* $I \in \mathbb{Z}^n$, *on a*

$$\pi_{\mathbb{A}}\big(e^{I,\mathbb{A}} / \prod\nolimits_{1\leq i\leq n}(1-z/a_i)\big) = S_I(\mathbb{A}+z) \ ,$$

$$\pi_{\mathbb{A}}\big(e^{I,\mathbb{A}} \cdot \prod\nolimits_{1\leq i\leq n}(1-z/a_i)\big) = S_I(\mathbb{A}-z) \ .$$

Preuve. — On remarque que $e^{I,\mathbb{A}} \cdot \prod(1-z/a_i) = e^{I,\mathbb{A}} \sum(-1)^j \Lambda^j(\mathbb{A}^\vee)$ est identique à $\sum(-z)^{|\varepsilon|} e^{I-\varepsilon,\mathbb{A}}$, somme sur tous les vecteurs $\varepsilon \in \{0,1\}^n$. L'image de cette somme par $\pi_{\mathbb{A}}$ est bien $S_I(\mathbb{A}-z)$ d'après la formule de Pieri. La formule analogue pour la multiplication par les fonctions complètes S_i, que nous n'avons pas écrite, donne de même la fonction $S_I(\mathbb{A}+z)$ développée suivant les puissances de z $\square$

Tenant compte de ce que $S_k(a+z) = a^k(1+z/a+\cdots+z^k/a^k)$ et de ce que les monômes $e^{J-\rho,\mathbb{A}}$, $J \notin \mathbb{N}^n$, $J-\rho = J_n,\ldots,J_2-n+2,J_1-n+1$, ont une image nulle par $\pi_{\mathbb{A}}$, on peut réécrire le lemme, pour tout $I \in \mathbb{N}^n$:

$$\pi_{\mathbb{A}}\left(e^{-\rho} S^{I_n}(a_n+z)\cdots S^{I_2+n-2}(a_2+z) S^{I_1+n-1}(a_1+z)\right) = S_I(\mathbb{A}+z) \ , \tag{7.6}$$

$$\pi_{\mathbb{A}}\left(S^{I_n}(a_n-z)\cdots S^{I_2}(a_2-z) S^{I_1}(a_1-z)\right) = S_I(\mathbb{A}-z) \ . \tag{7.7}$$

Les opérateurs D_{ψ^k} et "multiplication par ψ^k" sont adjoints par rapport au produit scalaire étudié section 4. De fait, D_{ψ^k} est "proche" de l'opérateur de multiplication par $\psi^k(\mathbb{A}^\vee)$. En effet, soient k un entier, $k \leq card(\mathbb{A}) = n$ et $I \in \mathbb{N}^n$. La formule dite de Murnaghan-Nakayama [J&K,p.60] est

$$D_{\psi^k}\big(S_I(\mathbb{A})\big) = S_{I-k0\cdots 0} + \cdots + S_{I-0\cdots 0k}\ . \tag{7.8}$$

Par ailleurs, $\psi^k(\mathbb{A}^\vee)$ est un scalaire pour $\pi_{\mathbb{A}}$ et donc

$$\begin{aligned}\psi^k(\mathbb{A}^\vee)\cdot S_I(\mathbb{A}) &= \pi_{\mathbb{A}}\big(\psi^k(\mathbb{A}^\vee)\cdot e^{I,\mathbb{A}} \\ &= \pi_{\mathbb{A}}\big(e^{I-k0\cdots 0} + \cdots + e^{I-0\cdots 0k}\big)\ .\end{aligned} \tag{7.9}$$

La différence entre les deux expressions provient de ce que $\pi_{\mathbb{A}}(e^{J,\mathbb{A}})$, $j \in \mathbb{Z}^n$, n'est égal à $S_J(\mathbb{A})$ que lorsque $J \geq -\rho = (0,-1,\ldots,-n+1)$.

Plus précisément, par regoupement de termes on obtient l'identité suivante:

Lemme (7.10). — *Soient p,q,r trois entiers positifs,* $\mathbb{A} = \{a_1,\ldots,a_n\}$ *un alphabet totalement ordonné de cardinal n* $\geq p+q+r$. *Soient* $\mathbb{B} = \{a_1,\ldots,a_r\}$, $\mathbb{D} = \{a_{r+1},\ldots,a_n\}$. *Alors, pour tout* $I \in \mathbb{N}^r$, *on a*

$$\begin{aligned}\psi^p(\mathbb{A}^\vee)D_{\psi^q}\big(S_I(\mathbb{A})\big) &= \pi_{\mathbb{A}}\big(\psi^p(\mathbb{D}^\vee)\psi^q(\mathbb{B}^\vee)e^{I,\mathbb{B}}\pi_{\mathbb{A}}\big(\psi^p(\mathbb{B}^\vee)\psi^q(\mathbb{B}^\vee)e^{I,\mathbb{B}} \\ &= \pi_{\mathbb{A}}\big(\psi^p(\mathbb{D}^\vee)\psi^q(\mathbb{B}^\vee)e^{I,\mathbb{B}} + D_{\psi^p}D_{\psi^q}\big(S_I(\mathbb{A})\big)\end{aligned}$$

Par exemple, pour $n = 6$, on a $\psi_1(\mathbb{A}^\vee)\cdot\big(S_{127}(\mathbb{A}) + S_{145}(\mathbb{A})\big) = D_{\psi^2}\left(\psi_1(\mathbb{A}^\vee)\cdot\big(S_{147}(\mathbb{A})\big)\right) = \pi_{\mathbb{A}}\big((a_6^{-1}+a_5^{-1}+a_4^{-1})(a_3^{-1}+a_2^{-1}+a_1^{-1})a_3^1a_2^4a_1^7\big)+$
$D_{\psi^1}\big(S_{127}(\mathbb{A}) + S_{145}(\mathbb{A}) = \pi_{\mathbb{A}}\big(a_6^{-1}a_3^1a_2^2a_1^7 + a_6^{-1}a_3^1a_2^4a_1^5\big)+$
$\big(S_{027}(\mathbb{A}) + S_{117}(\mathbb{A}) + S_{126}(\mathbb{A})\big)\big(S_{045}(\mathbb{A}) + S_{135}(\mathbb{A}) + S_{144}(\mathbb{A})\big)$.

Ce lemme permet d'écrire commodément les opérateurs L_k définis section 3 et d'apporter une preuve differée :
Preuve de la proposition 3.6. — Soit $\heartsuit$ l'opérateur : $S_{i\cdots jh}(\mathbb{A}) \to (h+n-1)S_{i\cdots j\,h-k}(\mathbb{A}) + (j+n-2)S_{i\cdots j-k\,h}(\mathbb{A}) + \cdots$. D'après l'expression de L_k en fonction de ∇_{-k} et celle ? de $\nabla_{-k}(\Delta)$, on a $\frac{1}{\Delta}\big(\nabla_{-k}(S_I(\Delta) - S_I\,\nabla_{-k}(\Delta)\big) = \heartsuit\big(S_I(\Delta)\big) + \pi_{\mathbb{A}}\big(-\sum_{p\leq q}\psi_{pq}(\mathbb{D}^\vee)e^{I,\mathbb{B}}\big) + \sum_{p\leq q}\psi_{pq}(\mathbb{B}^\vee+\mathbb{D}^\vee)\pi_{\mathbb{A}}(e^{I,\mathbb{B}})$.

La différence $L_k(S_I) - \heartsuit(S_I)$ est donc égale à l'image par $\pi_{\mathbb{A}}$ du produit du monôme $e^{I,\mathbb{A}} = e^{I,\mathbb{B})}$ par $\varepsilon\big(\frac{1}{2}\psi^{k/2\,k/2}(\mathbb{B}^\vee) - \psi^{k/2}(\mathbb{B}^\vee+\mathbb{D}^\vee)\psi^{k/2}(\mathbb{B}^\vee)\big) + \sum_{p<q}\big(\psi^{pq}(\mathbb{B}^\vee) - \psi^p(\mathbb{B}^\vee+\mathbb{D}^\vee)\psi^q(\mathbb{B}^\vee) - \psi^q(\mathbb{B}^\vee+\mathbb{D}^\vee)\psi^p(\mathbb{B}^\vee)\big) + \sum_{p\leq q}\big(\psi_{pq}(\mathbb{B}^\vee) - \psi^p(\mathbb{B}^\vee)\psi^q(\mathbb{B}^\vee) - \psi^q(\mathbb{B}^\vee)\psi^p(\mathbb{B}^\vee)\big)$.

Tenant compte de ce que $\psi^{pq} = \psi_{pq} + \psi_{p+q}$ et $\psi^{pp} = 2\psi_{pp} + \psi_{2p}$, on trouve que le facteur précédent se réduit à $\frac{1-k}{2}\psi^k(\mathbb{B}^\vee)$, d'où

$$L_k(S_I) - \heartsuit(S_I) = \pi_{\mathbb{A}}\big(\frac{1-k}{2}\psi^k(\mathbb{B}^\vee)e^{I,\mathbb{B}}\big) = \frac{1-k}{2}D_{\psi^k}\big(S_I(\mathbb{A})\big) \qquad \square$$

On définit l'*opérateur vertex* [Mi p.199] $V_{\mathbb{A},z}$ par

$$V_{\mathbb{A},z} := \exp\left(\sum z^{-i}\psi^i(\mathbb{A})/i \cdot \sum z^j \partial_{\psi^j(\mathbb{A})}\right) .$$

Comme $\partial_{\psi^j} = \frac{1}{j} D_{\psi^j}$, l'opérateur peut s'écrire

$$V_{\mathbb{A},z} := \sum z^{-i} S^i(\mathbb{A}) \cdot \sum (-z)^j D_{\Lambda^j(\mathbb{A})} . \tag{7.11}$$

L'involution $\mathbb{A} \to -\mathbb{A}$, qui échange $(-1)^j \Lambda^j$ et S^j, induit l'opérateur

$$V_{-\mathbb{A},z} := \sum (-z)^{-i} \Lambda^i(\mathbb{A}) \cdot \sum z^j D_{S^j(\mathbb{A})} . \tag{7.12}$$

On peut introduire des paramètres dans ces opérateurs. Par exemple, [Ji] utilise l'opérateur vertex obtenu en remplaçant $\mathbb{A}$ par $(1-t)\mathbb{A}$, où t est une indéterminée supplémentaire:

$$\begin{aligned} V_{(1-t)\mathbb{A},z} &:= \exp\left(\sum z^{-i}\psi^i\big(\mathbb{A}(1-t)\big)/i \cdot \sum z^j \partial_{\psi^j\left(\mathbb{A}(1-t)\right)}\right) \\ &= \exp\left(\sum z^{-i}\frac{1-t^i}{i}\psi^i(\mathbb{A}) \cdot \sum z^j \frac{1-t^j}{j} D_{\psi^j(\mathbb{A})}\right). \end{aligned}$$

Cela lui permet d'obtenir une nouvelle présentation des polynômes de Hall-Littlewood.

[Thi] utilise l'opérateur $V_{\mathbb{A},1}$ pour décrire le produit intérieur (correspondant au produit des caractères du groupe symétrique) dans $\mathfrak{Sym}(\mathbb{A})$. Les récurrences sur le *Pléthysme* des fonctions symétriques font appel, quant à elles, à $V_{\mathbb{A},z}$, *cf* [C&T].

Une propriété essentielle de cet opérateur est le lemme suivant [Thi, lemme 3.2]:

LEMME (7.13). — *Soient $\mathbb{A}$ un alphabet infini, n un entier, $I \in \mathbb{Z}^n$. Alors*

$$V_{\mathbb{A},z}\big(S_I(\mathbb{A})\big) = \sum_{-\infty}^{+\infty} z^{-k} S_{I\,k}(\mathbb{A}) .$$

Preuve. — Soit a_1 la première lettre de $\mathbb{A}$. De l'identification $\sum z^{-k} S^k(\mathbb{A}) = \pi_{\mathbb{A}}\big((1-a_1/z)^{-1}\big)$, on tire $V_{\mathbb{A},z}\big(S_I(\mathbb{A})\big) = \pi_{\mathbb{A}}\big((1-a_1/z)^{-1}\big) \cdot \sum (-z)^j S_{I/1^j}(\mathbb{A}) = \sum_k z^{-k} \pi_{\mathbb{A}}\big(\sum_j (-1)^j S_{I/1^j}(\mathbb{A})\, a^{k+j}\big) = \sum z^{-k} \sum (-1)^j S_{I/1^j}(\mathbb{A})\, S^{k+j}(\mathbb{A}) = \sum (-z)^k S_{I\,k}(\mathbb{A})$ $\square$

8. Opérateur d'Hirota. — Ce paragraphe reprend un travail en commun avec De Concini, esquissé dans [DeC &L]. Le calcul reposait essentiellement sur des manipulations de déterminants que nous avons remplacées ici par l'usage plus éclairant, quoique strictement équivalent, des opérateurs de symétrisation et des opérateurs vertex.

La structure intime des relations entre bosons et fermions repose, au dire des spécialistes [Ka , Ka&R, Mi] sur les propriétés des opérateurs vertex, et plus précisément, sur la description du noyau de l'opérateur d'Hirota H : soient deux alphabets $\mathbb{A}$,$\mathbb{B}$ infinis, ζ une indéterminée. Alors

$$H\big(f(\mathbb{A}) \otimes f(\mathbb{B})\big) := V_{-\mathbb{A},\zeta}\big(f(\mathbb{A})\big) \otimes V_{\mathbb{B},\zeta}\big(f(\mathbb{B})\big)\big|_{\zeta} \ , \tag{8.1}$$

où $\big|_{\zeta^i}$ désigne le coefficient de ζ^i.

Un changement formel d'alphabet [K&R p.72, Mi p.249] donne pour le noyau de H le système d'équations suivant, avec $\mathbb{Y}$ un alphabet supplémentaire quelconque :

$$\sum\nolimits_{j\geq 0} S^j(-2\mathbb{Y}) D_{S^{j+1}(\mathbb{Y})}\, f(\mathbb{A}+\mathbb{Y})\, f(\mathbb{A}-\mathbb{Y}) = 0 \ , \tag{8.2}$$

ou bien encore, en utilisant la formule de Taylor,

(8.3)
$$\sum\nolimits_{j\geq 0} S^j(-2\mathbb{Y}) D_{S^{j+1}(\mathbb{B})} \exp\left(\sum\nolimits_{k\geq 1} \tfrac{1}{k}\psi_k(\mathbb{Y}) D_{\psi^k(\mathbb{B})}\, f(\mathbb{A}{+}\mathbb{B})\, f(\mathbb{A}{-}\mathbb{B})\,\right|_{\mathbb{B}=0} = 0 .$$

La spécialisation d'une fonction symétrique $g(\mathbb{B})$ en $\mathbb{B}=0$ est égale au produit scalaire $(g(\mathbb{B}),1)_{\mathbb{B}}$. L'équation (8.3) devient

$$\forall \mathbb{Y},\ \Big(f(\mathbb{A}+\mathbb{B}) f(\mathbb{A}-\mathbb{B})\,,\ \sum S^j(-2\mathbb{Y}) S^{j+1}(\mathbb{B}) \sum S^i(\mathbb{B}\mathbb{Y})\Big)_{\mathbb{B}} = 0 \ ; \tag{8.4}$$

Le membre de droite est l'image par $\pi_{\mathbb{B}}$ de la fonction $b_1 \sum S^j(-2\mathbb{Y}) b_1^j \sum S^i(\mathbb{B}\mathbb{Y}) = b_1 \sum S^i\big((\mathbb{B}{-}b_1{-}b_1)\mathbb{Y}\big)$. Combinant l'identité $\pi_{\mathbb{B}}\big(S_H(\mathbb{B}-b_1)b_1^k\big) = S_{Hk}(\mathbb{B})$, la formule de Cauchy [Macd] $\sum S^i\big((\mathbb{B}-b_1)\mathbb{Y}\big) = \sum S_H(\mathbb{B}-b_1) S_H(\mathbb{Y})$, et enfin le développement $S_H(\mathbb{B}-b_1-b_1) = \sum S_J(\mathbb{B}-b_1) b_1^{|H-J|}$, somme sur tous les vecteurs J tels que $H-J \in \{0,1\}^*$, on reécrit (8.4) en

$$\Big(f(\mathbb{A}+\mathbb{B})\, f(\mathbb{A}-\mathbb{B})\,,\ \sum\nolimits_J (-1)^{|H-J|}\, S_{J\ 1+|H-J|}(\mathbb{B})\Big)_{\mathbb{B}} . \tag{8.5}$$

Pour simplifier les notations, on définit pour tout entier n, tout L dans $\mathbb{Z}^n$ l'opérateur linéaire R_L sur $\mathfrak{Sym}(\mathbb{A})$ par

$$R_L(f) := \Big(f(\mathbb{A}{+}\mathbb{B}) f(\mathbb{A}{-}\mathbb{B})\,,\, S_L(\mathbb{B})\Big)_{\mathbb{B}} = D_{S_L(\mathbb{B})}\big(f(\mathbb{A}{+}\mathbb{B}) f(\mathbb{A}{-}\mathbb{B})\big)\big|_{\mathbb{B}=0} .$$

Le système d'équations (8.5) s'écrit maintenant

(8.6) $\forall n, \forall H \in \mathbb{N}^n$, f appartient au noyau de $\displaystyle\sum_{J, H-J\in\{0,1\}^*} R_{J\ 1+|H-J|}$.

Les premiers opérateurs non nuls sont

$$
(8.7)\qquad
\begin{aligned}
&\text{pour } H=3, && R_{31}-R_{22}=-2R_{22}\\
&\text{pour } H=4, && R_{41}-R_{32}=-R_{23}\\
&\text{pour } H=13, && R_{131}-R_{32}-R_{122}+R_{23}=-2R_{122}+R_{23}\\
&\text{pour } H=22, && R_{221}-R_{122}+R_{113}=-R_{122}+R_{113}\\
&\text{pour } H=5, && R_{51}-R_{42}=-R_{24}+R_{33}
\end{aligned}
$$

IL faut tenir compte des règles de redressement: $R_{\dots i\, j\dots} = -R_{\dots j+1\ i-1\dots}$ qui proviennent des règles identiques satisfaites par les fonctions de Schur.

Les premières équations non triviales sont donc

$$R_{22}(f)=0; R_{23}(f)=0; R_{122}(f)=0, R_{24}(f)-R_{33}(f)=0 \ \&c.$$

L'expression développée de l'opérateur R_H, H partition, s'obtient sans difficulté à partir du treillis des partitions contenues dans H, car $D_{S_H}(fg)=\sum_{I,J}\big(S_I\cdot S_J\,, S_H\big) D_{S_I}(f)\cdot D_{S_J}(g)$, somme sur toutes les paires de partitions I,J.

Ainsi,

(8.8)

$$
\begin{aligned}
R_{22}(f) = {}& D_{S_{22}}(f)\cdot D_{S_{00}}(g) - D_{S_{12}}(f)\cdot D_{S_{01}}(g) + D_{S_{11}}(f)\cdot D_{S_{02}}(g)\\
& D_{S_{02}}(f)\cdot D_{S_{11}}(g) - D_{S_{01}}(f)\cdot D_{S_{12}}(g) + D_{S_{00}}(f)\cdot D_{S_{22}}(g)\ .
\end{aligned}
$$

Lorsque f est une fonction de Schur S_I, la relation précédente s'écrit

$$2S_{I/22}S_I - 2S_{I/12}S_{I/01} + 2S_{I/02}S_{I/11}$$

qui est la plus simple relation de Plücker concernant les mineurs de la matrice $\big[S_{j-i}\big]_{i,j\geq 0}$.

Plus généralement, pour tout $I\in\mathbb{N}^n$, pour tout $k : 1\leq k\leq n$, tout j, notons $I\setminus I_k$ le vecteur obtenu en supprimant la k-ième composante de I et Ij le vecteur obtenu en ajoutant une composante égale à j. Notons aussi $[I,\mathbb{A}]$ pour la fonction de Schur $S_{I-\rho}(\mathbb{A})$, avec $I-\rho = I_1\, I_2{-}1 \dots I_n{-}n{+}1$, et $D_{[I]}$ pour $D_{[I,\mathbb{A}]}$.

On définit l'opérateur de Plücker $P_{[I]\,[J]}$ sur l'anneau des polynômes $\mathfrak{Sym}$ par

$$P_{[I]\,[J]}(f) = \sum\nolimits_k (-1)^k D_{[I\;J_k]}(f)\; D_{[J\setminus J_k]}(f)\ .$$

On vient de voir que $P_{[0][123]}(f)$ est égale à $D_{[01]}(f)D_{[23]}(f) - D_{[02]}(f)D_{[13]}(f) + D_{[03]}(f)D_{[12]}(f) = \frac{1}{2}R_{22}(f)$.

On vérifierait tout aussi aisément pour les opérateurs (8.7) que $R_{23}(f) = D_{[01]}D_{[24]}(f) - D_{[02]}(f)D_{[14]}(f) + D_{[04]}(f)D_{[12]}(f) - D_{[012]}(f)D_{[134]}(f) + D_{[013]}(f)D_{[124]}(f) - D_{[014]}(f)D_{[023]}(f) = P_{[0][124]}(f) + P_{[01][1234]}(f) = -R_{122}(f)$; $R_{24}(f) - R_{33}(f) = P_{[0][125]} - P_{[0][134]} + P_{[02][1234]} - P_{[012][12345]}$.

Identifier pour tout n, tout $H \in \mathbb{N}^n$ la somme $\sum_{J,H-J\in\{0,1\}^*} R_{J\ 1+|H-J|}$ à une somme de relations de Plücker demanderait des développements combinatoires trop loin des invariants.

Revenons plutôt à l'opérateur H dont on étend la définition à $\mathfrak{Sym}(\mathbb{A}) \otimes \mathfrak{Sym}(\mathbb{B}) \xrightarrow{H} \mathfrak{Sym}(\mathbb{A}) \otimes \mathfrak{Sym}(\mathbb{B})$:

$$H\big(f(\mathbb{A}) \otimes g(\mathbb{B})\big) := V_{-\mathbb{A},\zeta}\big(f(\mathbb{A})\big)\; V_{\mathbb{B},\zeta}\big(g(\mathbb{B})\big)\big|_{\zeta}\ .$$

L'image du produit de deux fonctions de Schur $S_L(-\mathbb{A}) \otimes S_J(\mathbb{B})$ est d'après le lemme (7.13)

$$\begin{aligned} H\big(S_L(-\mathbb{A}) \otimes S_J(\mathbb{B})\big) &= \sum_h \zeta^{-h} S_{Lh}(-\mathbb{A}) \otimes \sum_k \zeta^{-k} S_{Jk}(\mathbb{B})\big|_{\zeta} \\ &= \sum_{h+k=-1} S_{Lh}(-\mathbb{A}) \otimes S_{Jk}(\mathbb{B})\ . \end{aligned} \tag{8.9}$$

Revenant aux fonctions de Schur de $\mathbb{A}$ au lieu de $-\mathbb{A}$, ce qui correspond à la *conjugaison* des partitions [Macd], et utilisant la notation $[I,\mathbb{A}]$ pour la fonction de Schur $S_{I-\rho}(\mathbb{A})$, on trouve finalement :

Proposition 8.10. — *Soient $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ deux alphabets infinis, n un entier, $I,J \in \mathbb{N}^n$. Alors,*

$$H\big([I,\mathbb{A}] \otimes [J,\mathbb{B}]\big) = \sum (-1)^{n-h} [I \setminus I_h,\mathbb{A}] \cdot [I_h J,\mathbb{B}] \quad .$$

En particulier, pour $I = J$, $H\big([J,\mathbb{A}] \otimes [J,\mathbb{B}]\big)$ est identiquement nulle.

Par exemple $H\big([1245,\mathbb{A}] \otimes [01912,\mathbb{B}]\big) = H\big(S_{1122}(\mathbb{A}) \otimes S_{0079}(\mathbb{B}) = \sum_{h+k=-1} S_{24h}(-\mathbb{A}) \otimes S_{79k}(\mathbb{B}) = S_{24\ {-2}}(-\mathbb{A}) \otimes S_{791}(\mathbb{B}) + S_{24\ {-1}}(-\mathbb{A}) \otimes S_{790}(\mathbb{B}) + S_{241}(-\mathbb{A}) \otimes S_{79\ {-2}}(\mathbb{B}) = S_{13}(-\mathbb{A}) \otimes S_{368}(\mathbb{B}) + S_{113}(-\mathbb{A}) \otimes S_{268}(\mathbb{B}) - S_{223}(-\mathbb{A}) \otimes S_{068}(\mathbb{B}) = S_{112}(\mathbb{A}) \otimes S_{368}(\mathbb{B}) - S_{113}(\mathbb{A}) \otimes S_{268}(\mathbb{B}) +$

$S_{133}(\mathbb{A}) \otimes S_{068}(\mathbb{B}) =$
$[124,\mathbb{A}][015912,\mathbb{B}] - [125,\mathbb{A}][014912,\mathbb{B}] + [145,\mathbb{A}][012912,\mathbb{B}]$.

L'équation d'Hirota $H\big([J,\mathbb{A}] \otimes [J,\mathbb{B}]\big) = 0$ est équivalente à un système de relations quadratiques qui ne sont pas les relations de Plücker sous leur forme usuelle. Un exemple l'illustrera.

D'après la proposition précédente, $H\big([246,\mathbb{A}]\otimes[ijh,\mathbb{B}]\big) = [24,\mathbb{A}][6ijh,\mathbb{B}] - [26,\mathbb{A}][4ijh,\mathbb{B}] + [46,\mathbb{A}][2ijh,\mathbb{B}]$ n'est autre que le développement du déterminant

$$\begin{vmatrix} S_2(\mathbb{A}) & S_4(\mathbb{A}) & S_6(\mathbb{A}) & 0 & 0 & 0 \\ S_1(\mathbb{A}) & S_3(\mathbb{A}) & S_5(\mathbb{A}) & 0 & 0 & 0 \\ S_2(\mathbb{B}) & S_4(\mathbb{B}) & S_6(\mathbb{B}) & S_i(\mathbb{B}) & S_j(\mathbb{B}) & S_h(\mathbb{B}) \\ S_1(\mathbb{B}) & S_3(\mathbb{B}) & S_5(\mathbb{B}) & S_{i-1}(\mathbb{B}) & S_{j-1}(\mathbb{B}) & S_{h-1}(\mathbb{B}) \\ S_0(\mathbb{B}) & S_2(\mathbb{B}) & S_4(\mathbb{B}) & S_{i-2}(\mathbb{B}) & S_{j-2}(\mathbb{B}) & S_{h-2}(\mathbb{B}) \\ 0 & S_1(\mathbb{B}) & S_3(\mathbb{B}) & S_{i-3}(\mathbb{B}) & S_{j-3}(\mathbb{B}) & S_{h-3}(\mathbb{B}) \end{vmatrix}$$

suivant ses deux premières lignes. La relation de Plücker exprimant la nullité du déterminant lorsque $\{2,4,6\} = \{i,j,h\}$ correspond par contre au développement du déterminant suivant ses trois premières colonnes. Il faut donc faire intervenir la symétrie ligne/colonnes d'un déterminant pour relier l'équation 8.10 aux relations de Plücker.

La proposition 8.10 exprime l'image par l'opérateur d'Hirota d'un produit de fonctions de Schur $S_I \cdot S_J$, $I,J \in \mathbb{Z}^n$, comme une somme de produits de mineurs d'ordre $n-1$ et $n+1$. Pour n'impliquer que des mineurs du même ordre, on définit, suivant une idéee de De Concini, le compagnon suivant de l'opérateur d'Hirota, $\mathfrak{Sym}(\mathbb{A}) \otimes \mathfrak{Sym}(\mathbb{B}) \xrightarrow{G} \mathfrak{Sym}(\mathbb{A}) \otimes \mathfrak{Sym}(\mathbb{B})$:

$$G\big(f(\mathbb{A}) \otimes g(\mathbb{B}) := V_{\mathbb{A},\nu}\big(f(\mathbb{A})\big)\, V_{-\mathbb{B},\nu}\big(g(\mathbb{B})\big)\Big|_{\nu^{-1}} \ ,$$

où ν une indéterminée supplémentaire.

L'opérateur G est injectif, contrairement à H. En effet le composé de G avec la bijection $f(\mathbb{A}) \otimes g(\mathbb{B}) \to f(\mathbb{A}+\nu) \otimes g(\mathbb{B}-\nu)$ est l'opérateur

$$\begin{aligned} f(\mathbb{A}) \otimes g(\mathbb{B}) \to & \big(1 + \frac{1}{\nu}(\mathbb{A}-\mathbb{B}) + \frac{1}{\nu^2} S^2(\mathbb{A}+\mathbb{B}) + \cdots\big) f(\mathbb{A}) g(\mathbb{B})\Big|_{\nu^{-1}} \\ & = \mathbb{A} f(\mathbb{A}) \otimes g(\mathbb{B}) - f(\mathbb{A}) \otimes B g(\mathbb{B}) \ . \end{aligned}$$

Le noyau de H coïncide donc avec celui de $G\big(H()\big)$.

L'action de G sur la base des fonctions de Schur s'explicite de la même manière que celle de H et nous ne répeterons pas la preuve.

Lemme 8.11. — *Soient* $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ *deux alphabets infinis*, n *un entier*, $I,J \in \mathbb{N}^n$. *Alors*,

$$G\big([I,\mathbb{A}] \otimes [J,\mathbb{B}]\big) = [1I,\mathbb{A}][0J + 02^n,\mathbb{B}] - [0I,A][1J + 02^n,\mathbb{B}] + \sum (-1)^{n-k-1}[(J_k + 2)I,\mathbb{A}] \cdot [J \setminus J_k,\mathbb{B}] \quad .$$

L'action de $G\big(H()\big)$ n'implique que des mineurs du même ordre, comme le montre le théorème suivant (*cf* [DeC &L]), en notant E_{hk} l'opérateur qui échange I_h et J_k.

Théorème 8.12. — *Soient* $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ *deux alphabets infinis*, n *un entier*, $I,J \in \mathbb{N}^n$. *Alors*,

$$G\Big(H\big([I,\mathbb{A}] \otimes [J,\mathbb{B}]\big)\Big) = \Big(n + \sum_{1 \le h,k \le n} (-1)^{h+k+p} E_{hk}\Big) \big([I,\mathbb{A}][J,\mathbb{B}]\big) \quad .$$

Preuve. — On a à composer les expressions explicites de H et G, en prenant garde de ne considérer que des vecteurs appartenant au même espace $\mathbb{N}^{n+1}$ ou $\mathbb{N}^{n+2}$. Décomposons G en deux opérateurs $G = G_1 + G_2$, avec $G_1\big([I,\mathbb{A}][J,\mathbb{B}]\big) := \sum (-1)^{n-k-1}[(J_k + 2)I,\mathbb{A}] \cdot [J \setminus J_k,\mathbb{B}]$.

Comme $H\big([I,\mathbb{A}] \otimes [J,\mathbb{B}]\big) = \sum (-1)^{n-h}[01I \setminus I_h + 002^{n-1},\mathbb{A}] \cdot [I_h J,\mathbb{B}]$, le composé $G_2\big(H([I,\mathbb{A}][J,\mathbb{B}])\big)$ est nul puisque $[101\ldots,\mathbb{A}] = 0 = [001\ldots,\mathbb{A}]$.

D'un autre côté, $G_1\big(H([I,\mathbb{A}][J,\mathbb{B}])\big)$ décompose en la somme de

$$\sum\nolimits_h (-1)^{n-h}[(I_h + 2)\, 0\, 1\, I \setminus I_h + 0002^{n-1},\mathbb{A}] \cdot [J,\mathbb{B}]$$

et de

$$\sum\nolimits_{h,k} (-1)^{n-h-k}[(J_k + 2)\, 0\, 1\, I \setminus I_h + 0002^{n-1},\mathbb{A}] \cdot [I_h J \setminus J_k,\mathbb{B}] \ .$$

Revenant à l'indexation dans $\mathbb{N}^n$, on trouve bien l'expression requise □

Références

[Ba] Bacry (H.). — Zeros of polynomials and generalized Chebyschev polynomials, *Group Theoretical Methods in Physics*, Moscou Nauka, 1986 .

[Bee] Beerends (R.J.). — Chebyschev Polynomials in several variables, *Thesis*, Center for Math. Analysis, Canberra, 1988 .

[Bou] Bourbaki (N.). — *Algèbre, ch.IV*. — Masson , 1981 .

[C&T] Carre (C.) & Thibon (J.Y.). — Plethysm and Vertex Operators, à *paraître* .

[Cay1] Cayley (A). — On symmetric functions and seminvariants , *Amer. J. of Math.* , t. **15** , 1893 , p. 1–74 .

[Cay2] Cayley (A). — A Memoir on seminvariants , *Amer. J. of Math.* , t. **7** , 1885 , p. 1–25 .

[DeC&L] De Concini (C.) & Lascoux (A.). — *Lettre ouverte sur les fonctions de Schur et équations de Plücker.* — Roma , 1884 .

[J&K] James (G.) & Kerber (A.). — *The representation theory of the symmetric group.* — *Encyclopedia of M.*, Cambridge Un. Press , 1989 .

[Ji] Jing (N.). — Vertex operators and Hall-Littlewood symmetric functions, *Advances in M.*, *à paraître* .

[Ka] Kac (V). — *Infinite dimensional Lie algebras.* — Cambridge Un.Press, 1985.

[K&R] Kac (V.) & Raina (A.K.). — *Highest weight representations of infinte dimensional Lie algebras.* — World Scient. , 1987 .

[K&Ro] Kung (J) & Rota (J.C). — The invariant theory of binary forms , *Bull.Amer.M.S.* , t. **10**, 1984, p. 27–85 .

[Ho] Howe (R.). — The classical groups and invariants of binary forms , *Proc. Symp. Pure M.* , t. **48** , 1988 , p. 133–166 .

[L&S] Lascoux (A.) & Schützenberger (M.P.). — Symmetrization operators on polynomial rings, *Funct.Anal* , t. **21** , 1987 , p. 77–78.

[Macd] Macdonald (I.G.). — *Symmetric functions and Hall polynomials.* — Oxford Univ. Press , 1979 .

[McM1] Lt MaC Mahon (P.). — Algebraic identities arising out of an extension of Waring's formula, *Messengers of M.* , t. **14** , 1884, p. 8–11 .

[McM2] Lt MaC Mahon (P.). — On symmetric functions, and in particular on certain inverse operators in connecion therewith , *Proc. Lond. M. S.* , t. **15**, 1884 , p. 20–47 .

[McM3] Capt MaC Mahon. — A new theorem in symmetric functions, *Quart.*, t. **20**, 1885, p. 365–369.

[McM4] Mchl MaC Mahon. — The algebra of symmetric functions , *Proc. Camb. Ph. S.* , t. **21**, 1923 , p. 376–390.

[McM5] Maj MaC Mahon. — Partial differential multilinear operators , *Proc. London M. S.* , t. **18**, 1887, p. 61–88.

[McM6] Capt MaC Mahon. — Operators in the theory of seminvariants , *Quart.* , t. **20**, 1885 , p. 362–365.

[Mi] Mickelsson (J.). — *Current algebras and groups, Plenum Mono. in non linear Physics.* — Plenum , 1989.

[Pra] Pragacz (P.). — *Algebro-geometric applications of Schur S&Q polynomials.* — Séminaire d'Algèbre M. P. Malliavin, Paris , *à paraître* .

[Sy1] Sylvester (J.J.). — Note on Capt. Mac Mahon , *Messengers* , t. **14**, 1884, p. 163–165 .

[Sy2] Sylvester (J.J.). — On subinvariants , *Amer.J.M.* , t. **5**, 1882, p. 79–136.

[Thi] Thibon (J.Y.). — Hopf algebras of symmetric functions, *prépub. L.I.T.P.*, 1991.