

Polynômes de Kazhdan-Lusztig pour les variétés de Schubert vexillaires

Alain Lascoux

Résumé. — Nous donnons, dans le cas du groupe symétrique, les polynômes de Kazhdan-Lusztig $P_\mu(\nu)$ pour toutes les permutations vexillaires μ et pour ν quelconque. Nous utilisons pour ce faire la description de l'ordre de Bruhat à l'aide du treillis enveloppant du groupe symétrique.

Kazhdan-Lusztig polynomials for vexillary Schubert varieties

Abstract. — We give Kazhdan-Lusztig polynomials $P_\mu(\nu)$ for all vexillary permutations μ (i.e. μ does not contain any substring $jikh$, $i < j < h < k$), and all ν . We use the embedding of the symmetric group into its envelopping lattice, and the characterization of a permutation by the set of bigrassmannian ones which are below it with respect to the Ehressmann-Bruhat order.

Zelevinsky [14] a décrit une résolution des singularités des sous-variétés de Schubert des Grassmanniennes, qui explicite dans ce cas les polynômes de Kazhdan-Lusztig [5] comme polynômes de Poincaré [6].

Cette famille de variétés est incluse dans celle des sous-variétés de Schubert *vexillaires* (i.e. d'indice une permutation vexillaire) de la variété de drapeaux pour $Gl(\mathbb{C}^n)$. Les classes correspondantes dans l'anneau de cohomologie [10], [12], [13], ou de Grothendieck [8], possèdent nombre des propriétés combinatoires des classes dans le cas des variétés de Grassmann.

Les permutations vexillaires interviennent aussi dans le critère de non-singularité de Lakshmibai et Sandhya :

THÉORÈME [7]. — *La variété de Schubert X_μ , $\mu \in \mathfrak{S}(n)$, est non singulière à l'origine, et donc est lisse, ssi pour toute projection $p : \mathfrak{S}(n) \rightarrow \mathfrak{S}(4)$, alors $p(\mu) \neq 2143$ (i.e. μ est vexillaire) et $p(\mu) \neq 1324$.*

En d'autres termes, il n'existe pas de quadruple d'entiers $1 \leq i < j < h < k \leq n$ tel que $\mu(j) < \mu(i) < \mu(k) < \mu(h)$ ou $\mu(i) < \mu(h) < \mu(j) < \mu(k)$.

Nous avons choisi l'indexation des variétés de Schubert pour laquelle la variété de drapeau correspond à l'identité, et la variété de Schubert de dimension 0, à la permutation maximum $\omega = n \dots 1$ de $\mathfrak{S}(n)$. Nous noterons en conséquence $P_\mu(\nu)$ les polynômes de Kazhdan-Lusztig que leurs découvreurs [4] désignaient quant à eux par $P_{\nu\omega, \mu\omega}(q)$. En outre, nous considérerons les permutations comme appartenant au groupe symétrique infini $\mathfrak{S}(\infty) = \lim \mathfrak{S}(n)$, $\mathfrak{S}(n)$ étant plongé dans $\mathfrak{S}(n+1)$ par adjonction d'un point fixe $n+1$.

Les polynômes de Kazhdan-Lusztig sont intimement liés aux propriétés de l'ordre de Bruhat sur le groupe symétrique [1], [2]. En vertu de [11], nous plongeons le groupe symétrique dans son treillis *enveloppant*, l'ordre

de Bruhat étant l'ordre induit par celui du treillis. Ce dernier est distributif, ses générateurs étant les permutations *bigrassmanniennes*, qui ne sont autres que les permutations (que l'on notera $[r_0, r_1, r_2, r_3]$) du type

$$(1 \dots r_0, r_0 + r_2 + 1, \dots r_0 + r_2 + r_1, r_0 + 1, \dots r_0 + r_2, r_0 + r_2 + r_1 + 1, \dots r_0 + r_1 + r_2 + r_3),$$

où $r_0, r_3 \geq 0$, $r_1, r_2 \geq 1$ et $r_0 + r_1 + r_2 + r_3 = n$. Ces permutations sont obtenues en coupant $1, \dots, n$ en 4 blocs, et en permutant les deux blocs centraux.

D'après [11], une permutation μ est déterminée par l'ensemble $B(\mu)$ des bigrassmanniennes plus petites (au sens de l'ordre d'Ehresmann-Bruhat) qu'elle, et $\mu \geq \nu$ ssi $B(\mu) \supseteq B(\nu)$. Les éléments maximaux de $B(\mu)$ sont appelés les *rectrices* de μ , et correspondent bijectivement aux points essentiels de Fulton [4].

Soit $b = [r_0, r_1, r_2, r_3]$ une bigrassmannienne, et $\nu \in \mathfrak{S}(n)$ telle que $b \leq \nu$. La *distance* $d \in \mathbb{N}$ de ν à b est le plus grand entier d tel que $[r_0 - d, r_1 + d, r_2 + d, r_3 - d] \leq \nu$.

Enfin, on appellera *niveau* d'une permutation ν par rapport à une autre μ , lorsque $\mu \leq \nu$, le vecteur $v[\mu \rightarrow \nu]$ des distances de ν aux rectrices de μ .

Moyennant ces définitions, et les formules données dans [9], on peut décrire les polynômes $P_\mu(\nu)$ pour les permutations vexillaires:

THÉORÈME. — *A toute partition I dont le diagramme a k coins est associée une fonction $f_I : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}[q]$ dans l'ensemble des polynômes en q à coefficients positifs.*

Soit μ une permutation vexillaire, I la partition obtenue en réordonnant son code. Alors pour toute permutation $\nu \geq \mu$, on a

$$P_\mu(\nu) = f_I(v[\mu \rightarrow \nu]) ,$$

où $v[\mu \rightarrow \nu]$ est le niveau de ν au dessus de μ .

En particulier, la fonction f_I est déterminée par le cas des permutations grassmanniennes de code $0 \dots 0 I 0 \dots$ décrit en [9].

La partie combinatoire de la preuve, trop longue pour être donnée dans le cadre d'une note, repose sur le fait que les récurrences ci-dessous suffisent à déterminer de proche en proche les polynômes cherchés.

On veut montrer que la fonction inconnue ne dépend que de la partition obtenue en réordonnant le code de μ . On considère donc simultanément toutes les permutations correspondant à la même partition (c'est une classe vexillaire, au sens donné dans [12]). On a une induction entre classes vexillaires, qui correspond à l'accroissement de la plus grande part de la partition. Enfin, on utilise les récurrences suivantes (cf. [9]) déduites de celles

de de Kazhdan-Lusztig, mais n'impliquant pas les arêtes difficiles à calculer du graphe de Kazhdan-Lusztig. Ces relations portent sur des couples de permutations dont on modifie un triple de valeurs adjacentes situées à la même place, le triple étant noté $\{a < b < c\}$ pour les ν et $\{1 < 2 < 3\}$ pour les μ :

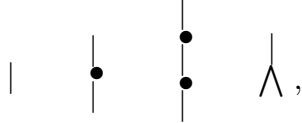
$$P_{\dots 213 \dots}(\dots cab \dots) - P_{\dots 213 \dots}(\dots bac \dots) = q(P_{\dots 231 \dots}(\dots acb \dots) - P_{\dots 231 \dots}(\dots abc \dots))$$

$$P_{\dots 132 \dots}(\dots bca \dots) - P_{\dots 132 \dots}(\dots acb \dots) = q(P_{\dots 312 \dots}(\dots bac \dots) - P_{\dots 312 \dots}(\dots abc \dots))$$

$$P_{\dots 213 \dots}(\dots bac \dots) - P_{\dots 213 \dots}(\dots abc \dots) = P_{\dots 231 \dots}(\dots bca \dots) - P_{\dots 231 \dots}(\dots acb \dots)$$

$$P_{\dots 132 \dots}(\dots acb \dots) - P_{\dots 132 \dots}(\dots abc \dots) = P_{\dots 312 \dots}(\dots cab \dots) - P_{\dots 312 \dots}(\dots bac \dots)$$

Les fonctions f_I ne dépendent pas des partitions I , mais seulement des arbres associés à ces partitions (cf. [9]). Ainsi, pour $\mathfrak{S}(6)$, les arbres irréductibles sont



de fonctions correspondantes (avec $[x] = 1 + q \dots + q^{x-1}$)

$$f_1(x) = [x + 1], f_{22}(x) = [x + 1][x + 2]/[2],$$

$$f_{333}(x) = [x + 1][x + 2][x + 3]/[2][3],$$

$$f_{233}(y, z) = [y + 1][z + 1] + q^3[y][z] + q^6[y - 1][z - 1] + q^9[y - 2][z - 2] + \dots$$

Ces quatre fonctions permettent d'exprimer tous les polynômes de Kazhdan-Lusztig $P_\mu(\nu)$, pour toutes les permutations μ image d'une permutation vexillaire de $\mathfrak{S}(6)$ par le plongement $\mathfrak{S}(6) \hookrightarrow \mathfrak{S}(1) \times \dots \times \mathfrak{S}(1) \times \mathfrak{S}(6) \times \mathfrak{S}(1) \times \dots$

Par exemple, $\mu = 15764238$ a pour code (03432000); par réordonnement, on trouve la partition 2334 qui donne l'arbre . Cet arbre décompose en les deux arbres  et , et donc

$$f_{2334}(x, y, z) = f_1(x)f_{233}(y, z) .$$

La permutation $\omega = 87654321$ est au niveau $[1, 1, 1]$ au dessus de μ , puisque $[0440]$, $[0530]$ et $[1250]$ sont les bigrassmanniennes maximales appartenant à $\mathfrak{S}(8)$ déduites des trois rectrices de μ : $[1331]$, $[1421]$, $[2141]$.

Ceci implique que les paramètres x, y, z sont 0 ou 1, et donc qu'il n'y a que 2^3 polynômes de Kazhdan-Lusztig $P_\mu(\nu)$ possibles (pour ν variable), à savoir :

$$f_{2334}(000) = 1,$$

$$\begin{aligned}
f_{2334}(010) &= f_{2334}(001) = 1 + q \ (\nu = 56781234, \nu = 45678123) \\
f_{2334}(011) &= 1 + 2q + q^2 + q^3 \ (\nu = 56784123), \\
f_{2334}(100) &= 1 + q \ (\nu = 17854236) \\
f_{2334}(110) &= f_{2334}(101) = (1 + q)^2 \ (\nu = 57861234, \nu = 47856123), \\
f_{2334}(111) &= (1 + q)(1 + 2q + q^3 + q^4) \ (\nu = 57864123),
\end{aligned}$$

ce qui coïncide bien avec les valeurs fournies par Fokko du Cloux [3].

Les 513 permutations vexillaires de $\mathfrak{S}(6)$ se distribuent en 15 classes suivant l'arbre associé. Nous donnons le cardinal de chaque classe, ainsi que la première permutation de la classe (pour l'ordre lexicographique), et son code :

$$\begin{aligned}
f_{333}: 456123 \ (333000), & \text{ card } 6 \\
f_{2344}: 564312 \ (4432), & \text{ card } 2 \\
f_{233}: 156423 \ (033200), & \text{ card } 23 \\
f_{233}f_1: 465312 \ (343200), & \text{ card } 3 \\
f_{22}: 125634 \ (002200), & \text{ card } 40 \\
f_{22}^2: 563412 \ (442200), & \text{ card } 2 \\
f_1f_{22}: 146523 \ (023200), & \text{ card } 27 \\
f_1^2f_{22}: 365412 \ (243200), & \text{ card } 41 \\
f_1f_{233}: 564132 \ (443010), & \text{ card } 80 \\
f_1f_{22}f_1: 465132 \ (343010), & \text{ card } 9 \\
f_1^2: 123654 \ (000210), & \text{ card } 205 \\
f_1^2f_{22}: 561432 \ (440210), & \text{ card } 14 \\
f_1^3: 126543 \ (003210), & \text{ card } 208 \\
f_1^4: 165432 \ (043210), & \text{ card } 46 \\
f_1^5: 654321 \ (543210), & \text{ card } 1
\end{aligned}$$

Bibliographie

- [1] F. BRENTI, A combinatorial formula for Kazhdan-Lusztig polynomials, *Invent. M.* , 118, 1994, p. 371-394.
- [2] F. BRENTI, Kazhdan-Lusztig and R-polynomials from a combinatorial point of view, *prépublication* , 1994.
- [3] FOKKO DU CLOUX, A transducer approach to Coxeter groups, *prépublication*, 1995.
- [4] W. FULTON, Flags, Schubert polynomials, degeneracy loci, *Duke Math.*, 65 , 1992, p. 381-420.
- [5] D. KAZHDAN, G. LUSZTIG, Representations of Coxeter groups and Hecke algebras, *Invent. M.*, 53, 1979, p. 165-184.
- [6] D. D. KAZHDAN, G. LUSZTIG, Schubert varieties and Poincaré duality *Proc. Symp. Pure M.*, 34, A.M.S. , 1980, p. 185-203.
- [7] V. LAKSHMIBAI, B. SANDHYA, Criterion for smoothness of Schubert

varieties, *Proc. Indian Acad. Sc. M.*, 100, 1990, p. 45-52.

[8] A. LASCOUX, Anneau de Grothendieck de la variété de drapeaux, in *The Grothendieck Festschrift, vol III*, Birkhäuser , 1990, p. 1-34.

[9] A. LASCOUX, M.P. SCHÜTZENBERGER, Polynômes de Kazhdan-Lusztig pour les grassmanniennes, *Astérisque* , 87-88, 1981, p. 249-266.

[10] A. LASCOUX, M.P. SCHÜTZENBERGER, Polynômes de Schubert, *C.R. Acad. Sc. Paris*, 294 , 1982, p. 447-450.

[11] A. LASCOUX, M.P. SCHÜTZENBERGER, Treillis et bases des groupes de Coxeter, *prépublication* , 1995.

[12] A. LASCOUX, M.P. SCHÜTZENBERGER, Schubert polynomials and the Littlewood-Richardson rule, *Letters in Math. Phys.* , 10, 1985, p. 111-124.

[13] I.G. MACDONALD, Notes on Schubert Polynomials, Pub. LACIM, UQAM, Montréal , 1991.

[14] A. ZELEVINSKY, Small resolutions of singularities of Schubert varieties, *Funct. Anal. Pry.*, 17 , 1983, p. 142-144.