



# Polynômes de Schubert

*Une approche historique*

Alain Lascoux



*(Le nous parsemant ce texte n'a pour fonction que de témoigner que tous mes travaux concernant les polynômes de Schubert sont le fruit d'une collaboration avec M.P.Schützenberger)*

Du temps de Newton, la meilleure manière de contrôler une fonction d'une variable, que ce soit le taux de change Livre/écu ou la course d'une planète, était la technique remontant aux babyloniens de noter suffisamment de ses valeurs à intervalles de temps réguliers. Par différences successives, on simplifie usuellement la fonction considérée. Dans le cas particulier d'un polynôme par exemple, on aboutit à la fonction nulle.

Le respect de la semaine anglaise introduisant des perturbations dans la régularité journalière des observations, Newton proposa dans les Principia [N] le remède de normaliser les différences par l'intervalle de temps auxquelles elles correspondent :

$$\begin{array}{ccccccc}
 f(a) & & f(b) & & f(c) & & f(d) \\
 \frac{f(a)-f(b)}{(a-b)} & & \frac{f(b)-f(c)}{(b-c)} & & \frac{f(c)-f(d)}{(c-d)} & & \\
 & \frac{\frac{f(a)-f(b)}{a-b} - \frac{f(b)-f(c)}{b-c}}{a-c} & & \frac{\frac{f(b)-f(c)}{b-c} - \frac{f(c)-f(d)}{c-d}}{b-d} & & & 
 \end{array}$$

En termes plus algébriques, étant donnée une fonction de plusieurs variables  $g(a, b, \dots)$ , la différence divisée de  $g$  par rapport à la paire de variables  $b, c$  est la fonction

$$\partial_{bc}(g) := (g(a, b, c, d, \dots) - g(a, c, b, d, \dots)) / (b - c) ,$$

les fonctions d'une variable  $a$  étant, comme l'avait déjà remarqué Newton, des fonctions de plusieurs variables de degré nul en  $b, c, \dots$ .

La théorie des différences divisées était, jusqu'à très récemment, réfugiée dans les livres d'analyse numérique.

Si l'on me permet une incidente, c'est d'ailleurs dans [MT] que je l'y rencontrai pour la première fois et vis qu'elle était un outil commode pour l'étude des fonctions de Schur drapeaux. En effet, les images des fonctions complètes en  $\{a, b, c\}$  par rapport à la différence divisée  $\partial_{cd}$  sont très exactement les fonctions complètes en  $\{a, b, c, d\}$ . Cela permet la manipulation des déterminants en les fonctions complètes par induction sur la taille des alphabets.

Revenons au cours historique principal. Aucun évènement notable en Europe jusqu'en 1800, où Rothe [Ro] définit le diagramme d'une permutation, qui exhibe la matrice représentant

une permutation en même temps que ses inversions. Chaque inversion :  $i < j, \mu_i > \mu_j$  (i.e. paires de 1 en position relative  $\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \\ 1 \end{smallmatrix}$ , crée une grappe en colonne  $j$  et ligne  $i$  :

$$\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \\ 1 \end{smallmatrix} \longrightarrow \begin{smallmatrix} 1 \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \\ 1 \end{smallmatrix}$$

Par exemple, la permutation  $\mu = 764198532$  est représentée par la matrice

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

et son diagramme de Rothe est (en gardant les 1 pour plus de clarté) :

|                                                                      |                                                                      |                                                                      |                                                                      |                                                                      |                                                                      |   |                                                                      |   |
|----------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|---|----------------------------------------------------------------------|---|
| —                                                                    | 1                                                                    | —                                                                    | —                                                                    | —                                                                    | —                                                                    | — | —                                                                    | — |
| —                                                                    | $\begin{smallmatrix} 1 \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{smallmatrix}$ | 1                                                                    | —                                                                    | —                                                                    | —                                                                    | — | —                                                                    | — |
| —                                                                    | $\begin{smallmatrix} 1 \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{smallmatrix}$ | $\begin{smallmatrix} 1 \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{smallmatrix}$ | —                                                                    | 1                                                                    | —                                                                    | — | —                                                                    | — |
| —                                                                    | $\begin{smallmatrix} 1 \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{smallmatrix}$ | $\begin{smallmatrix} 1 \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{smallmatrix}$ | —                                                                    | $\begin{smallmatrix} 1 \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{smallmatrix}$ | —                                                                    | — | 1                                                                    | — |
| —                                                                    | $\begin{smallmatrix} 1 \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{smallmatrix}$ | $\begin{smallmatrix} 1 \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{smallmatrix}$ | —                                                                    | $\begin{smallmatrix} 1 \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{smallmatrix}$ | —                                                                    | — | $\begin{smallmatrix} 1 \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{smallmatrix}$ | 1 |
| 1                                                                    | —                                                                    | —                                                                    | —                                                                    | —                                                                    | —                                                                    | — | —                                                                    | — |
| $\begin{smallmatrix} 1 \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{smallmatrix}$ | $\begin{smallmatrix} 1 \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{smallmatrix}$ | $\begin{smallmatrix} 1 \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{smallmatrix}$ | 1                                                                    | —                                                                    | —                                                                    | — | —                                                                    | — |
| $\begin{smallmatrix} 1 \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{smallmatrix}$ | $\begin{smallmatrix} 1 \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{smallmatrix}$ | $\begin{smallmatrix} 1 \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{smallmatrix}$ | $\begin{smallmatrix} 1 \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{smallmatrix}$ | $\begin{smallmatrix} 1 \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{smallmatrix}$ | 1                                                                    | — | —                                                                    | — |
| $\begin{smallmatrix} 1 \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{smallmatrix}$ | $\begin{smallmatrix} 1 \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{smallmatrix}$ | $\begin{smallmatrix} 1 \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{smallmatrix}$ | $\begin{smallmatrix} 1 \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{smallmatrix}$ | $\begin{smallmatrix} 1 \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{smallmatrix}$ | $\begin{smallmatrix} 1 \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{smallmatrix}$ | 1 | —                                                                    | — |

On peut aussi lire sur ce diagramme une décomposition de la permutation en un produit de transpositions simples, en numérotant dans chaque ligne les grappes par des entiers consécutifs, et en commençant par le numéro de la ligne:

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| — | 8 | — | — | — | — | — | — | — |
| — | 7 | 8 | — | — | — | — | — | — |
| — | 6 | 7 | — | 8 | — | — | — | — |
| — | 5 | 6 | — | 7 | — | — | 8 | — |
| — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| 3 | 4 | 5 | — | — | — | — | — | — |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | — | — | — | — |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | — | — | — |

Lisant à la mode occidentale de gauche à droite, puis de haut en bas, on obtient le mot 8 78 678 5678 345 23456 123456 qui est une décomposition réduite de  $\mu^{-1}$  lorsque l'on interprète chaque entier  $i$  comme la transposition simple  $\sigma_i$ .

Nouvelle interruption de l'histoire jusqu'en 1973 où Bernstein, Gelfand & Gelfand [B-G-G] et Demazure [D1] publient simultanément deux articles importants ; ils montrent entre autres que les différences divisées satisfont aux relations de Coxeter. En d'autres termes, pour chaque permutation  $\mu$ , il existe une différence divisée  $\partial_\mu$ , le cas de Newton correspondant aux transpositions simples. [B-G-G] et [D1] utilisent ces opérateurs pour définir une base linéaire de l'anneau de cohomologie de la variété de drapeaux, c'est-à-dire du quotient  $\mathcal{H}(A)$  de l'anneau des polynômes  $Z[a_1, \dots, a_n]$  par l'idéal engendré par les fonctions symétriques sans terme constant. En degré maximum  $\binom{n}{2}$   $\mathcal{H}(A)$  est de dimension 1. [B-G-G] et [D1] prouvent que les images par différences divisées de tout élément non nul de degré maximal forment une base linéaire de  $\mathcal{H}(A)$ . La classe canonique de départ choisie par [B-G-G] et [D1] est le Vandermonde  $\Delta(A) := \prod_{i < j} (a_i - a_j)$  (cf. plus bas pour un exemple).

M.P. Schützenberger et moi même étions à la recherche d'un outil permettant l'étude des deux ordres sur le groupe symétrique, en particulier pour calculer les polynômes de Kazhdan & Lusztig (cf. [L&S1]). [B-G-G] et [D1] nous apportèrent la révélation que les arêtes de l'hexagone doivent être interprétées comme les différences divisées  $\partial_{ab}$  et  $\partial_{bc}$ . Mais plutôt que de faire agir cet hexagone sur le Vandermonde  $(a-b)(a-c)(b-c)$ , nous avons pris le polynôme le plus simple sans symétries, qui se trouve être le monôme  $a^2b^1c^0$ . Plus généralement, les *Polynômes de Schubert* sont définis comme les images par les différences divisées du monôme

$$a_1^{n-1} a_2^{n-2} \dots a_n^0 .$$

Il sont indicés par les permutations, puisque les différences divisées le sont, et contiennent comme sous-famille les fonctions de Schur. Par exemple, la fonction de Schur

$$a^3b + a^2b^2 + ab^3$$

est égale au polynôme de Schubert  $X_{25134}$  qu'un lecteur averti distinguera du polynôme correspondant

$$\begin{aligned} & 12 \ cde^2 + 12 \ cd^2e + 12 \ c^2de - 6 \ bde^2 - 6 \ bd^2e - 6 \ bce^2 - 36 \ bcde - 6 \ bcd^2 - 6 \\ & bc^2e - 6 \ bc^2d + 6 \ b^2e^2 + 12 \ b^2de + 6 \ b^2d^2 + 12 \ b^2ce + 12 \ b^2cd + 6 \ b^2c^2 - 6 \ b^3e - 6 \\ & b^3d - 6 \ b^3c - 6 \ ade^2 - 6 \ ad^2e - 6 \ ace^2 - 36 \ acde - 6 \ acd^2 - 6 \ ac^2e - 6 \ ac^2d + 36 \ abde \\ & + 36 \ abce + 36 \ abcd - 18 \ ab^2e - 18 \ ab^2d - 18 \ ab^2c + 18 \ ab^3 + 6 \ a^2e^2 + 12 \ a^2de + 6 \\ & a^2d^2 + 12 \ a^2ce + 12 \ a^2cd + 6 \ a^2c^2 - 18 \ a^2be - 18 \ a^2bd - 18 \ a^2bc - 6 \ a^3e - 6 \ a^3d - 6 \\ & a^3c + 18 \ a^3b \end{aligned}$$

de [B-G-G] et [D1], les deux polynômes étant, à un facteur près, congrus modulo l'idéal.

Le calcul algébrique sur les polynômes de Schubert est pris en compte par la manipulation d'objets combinatoires (permutations, codes, diagrammes de Rothe & Riguet, tableaux, Weintrauben, etc. ) ou par l'utilisation d'un produit scalaire et d'opérateurs auto-adjoints.

Cette combinatoire est très semblable à, et même englobe, la combinatoire des fonctions de Schur ; les partitions doivent ainsi être considérées comme des permutations spéciales.

Pour illustrer ce propos, je me permets sans pudeur de détailler la première note sur le sujet [L&S2]. On y trouve

- une formule de Pieri (i.e. un produit sans multiplicité de polynômes de Schubert)
- un produit scalaire pour lequel les polynômes de Schubert sont auto-adjoints, la base adjointe des monômes étant les produits de fonctions élémentaires sur des drapeaux d'alphabets
- une caractérisation des permutations spéciales (dites *vexillaires*) pour lesquelles les polynômes de Schubert sont des fonctions de Schur drapeaux
- un préordre sur les permutations qui permet de décomposer un polynôme de Schubert  $X_\mu$  et en donne la partie symétrique stable  $F_\mu$  (qui peut être considérée comme la limite de  $X_\mu$  pour l'injection itérée  $S(n) \rightarrow S(1) \times S(n)$ ). Ce préordre fournit des arbres dont les sommets sont des permutations ; les cycles (classes ultimes) correspondent très exactement aux permutations vexillaires
- la remarque que l'on peut déformer les différences divisées de manière à obtenir une réalisation concrète, mais avec plus de paramètres, de l'algèbre de Hecke comme algèbre d'opérateurs sur l'anneau des polynômes, cf. [Ch]. Les cas dégénérés dont les générateurs satisfont à  $D^2 = 0$  ou  $D^2 = D$  sont les plus importants pour la géométrie et correspondent à l'anneau de cohomologie ou de Grothendieck de la variété de drapeaux.

Le *Comité de Lecture* de l'Académie des Sciences nous pria de sacrifier l'adjectif *vexillaire*, ainsi qu'un exemple de drapeaux associés, sur l'autel de la clarté et de la qualité internationale des *Comptes Rendus*. On trouvera les drapeaux manquants dans [Wa], le mot vexillaire ayant quant à lui été réintroduit, après la trêve estivale, dans la note suivante.

La formule la plus fondamentale que satisfasse les fonctions de Schur est la *formule de Cauchy* (dont une forme est la décomposition de la *Résultante*  $\prod (a_i - \beta_j)$  de deux alphabets. Les polynômes de Schubert vérifient eux aussi une formule de Cauchy [L1]. Plus généralement, on définit les polynômes de Schubert doubles en prenant comme point de départ la polarisation du Vandermonde  $X_\omega := \prod_{i+j \leq n} (a_i - \beta_j)$ , les différences divisées n'agissant que sur l'alphabet  $A$  des lettres romaines. Alors tout polynôme de Schubert double se décompose en une somme de produits de polynômes de Schubert simples relatifs à chacun des alphabets  $A$  et  $B$  de même cardinal  $n$ .

De nombreuses formules peuvent en fait être déduites de la simple observation que  $X_\omega$  s'annule pour toute spécialisation de  $A$  en une permutation de  $B$ , sauf pour la spécialisation  $a_1 \rightarrow \beta_n, a_2 \rightarrow \beta_{n-1}, \dots, a_n \rightarrow \beta_1$ , auquel cas on obtient  $\Delta(A)$  ( cf. [L& S12]).

L'anneau des polynômes symétriques est canoniquement muni d'une structure d'algèbre de Hopf ([Ze]) qui permet de couper l'alphabet en intervalles. La propriété correspondante des polynômes de Schubert est donnée dans [L& S4], où l'on trouve aussi la définition des *polynômes de Grothendieck* qui correspondent aux différences divisées isobares :

$$\pi_{ab}(f) := (af - bf^{\sigma_{ab}})/(a - b)$$

au lieu des différences divisées.

L'algèbre des différences divisées apparaît naturellement en géométrie des variétés de drapeaux ([Ar], [B-G-G], [D3], [Ko-K], [A-L-P]). Dans les cas symplectiques et orthogonaux, l'algèbre des différences divisées a permis à Pragacz et Ratajski de donner une preuve courte et transparente des formules de Pieri pour les grassmanniennes isotropes [P-R].

On retrouve par ailleurs les polynômes de Schubert doubles comme coefficients de la matrice de changement de base : différences divisées  $\rightarrow$  permutations ou son inverse ([L&S7], [L&S12]).

A la même époque, le professeur R. Stanley se penchait sur les chemins dans le permutoedre (*décompositions réduites*). On lui doit l'observation fondamentale que le nombre de décompositions réduites d'une permutation est une somme de dimensions de représentations du groupe symétrique. Plus précisément, il conjectura l'existence de certaines fonctions symétriques  $F'_\mu$  indicées par les permutations. Décomposant ces fonctions symétriques dans la base des fonctions de Schur, on obtient les dimensions cherchées. Cette conjecture me fut communiquée par Björner en septembre 82; les quelques exemples joints étaient suffisants pour montrer (la preuve est directe) que la fonction  $F'_\mu$  n'est autre que la partie symétrique stable du polynôme de Schubert  $X_\mu$  mentionnée plus haut. Restait à relier cette propriété (démontrée par Stanley [St]) à la combinatoire des tableaux associés aux polynômes de Schubert.

En particulier, en remplaçant les relations de Coxeter par les relations

$$i(i+1)i \cong (i+1)i(i+1)$$

$$i < j < k \Rightarrow jik \cong jki \quad \& \quad ikj \cong kij$$

on obtient un monoïde que nous avons appelé *monoïde nilplaxique* en [L& S4]; ce monoïde est très semblable au *monoïde plaxique* défini par les relations élémentaires de Knuth, quoique il relève l'algèbre du groupe symétrique alors que le monoïde plaxique permet d'étudier l'anneau des fonctions symétriques. Dans les deux cas chaque classe d'équivalence contient un tableau et un seul qui est donné par l'*algorithme de Schensted* ou le *jeu de taquin*, à une variante près . Cette adaptation de l'algorithme de Schensted a aussi été obtenue par Edelman et Greene [E-G]. Ces auteurs néanmoins préfèrent mettre l'accent sur d'autres objets qu'ils avaient découverts, à savoir les *tableaux balancés* qui décrivent l'ordre dans lequel une décomposition réduite d'une permutation crée ses inversions. Ainsi, la décomposition  $\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_1\sigma_3$  correspond au chemin

$$1234 \rightarrow 1324 \rightarrow 3124 \rightarrow 3142 \rightarrow 3412 \rightarrow 4312 \rightarrow 4321$$

et au tableau balancé  $\begin{smallmatrix} 6 \\ 21 \\ 435 \end{smallmatrix}$ . Edelman et Greene ont depuis étendu leur théorie des tableaux balancés à des diagrammes plus généraux que les diagrammes de Ferrers.

La combinatoire des décompositions réduites a été généralisée aux groupes de Weyl par Kraskiewicz [Kr2], le cas des groupes hyperoctaédraux se trouvant dans [Kr1] et [Ha].

Les différences divisées diminuent le degré, ce qui complique fortement leur relèvement à l'algèbre libre, si l'on veut garder la compatibilité avec les tableaux et la construction de Schensted. La solution est beaucoup plus simple dans le cas des différences isobares: en effet l'opérateur  $\pi_{ab}$  défini plus haut envoie  $a^4b$  sur  $a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4$ , c'est-à-dire interpolate entre le monôme  $a^kb^i$ ,  $k \geq i$  et son image par la transposition  $\sigma_{ab}$ , qui est  $a^ib^k$ . Comme on a une action du groupe symétrique sur l'algèbre libre, on peut aisément étendre les différences divisées  $\pi_{ab}$ , par interpolation, à l'algèbre libre. Ces nouveaux opérateurs ne vérifient toutefois pas les relations de Coxeter [L& S10].

Conservant les relations de compatibilité entre polynômes de Schubert et opérateurs  $\pi_{ab}$ , on obtient ainsi des sommes de tableaux qui relèvent les polynômes de Schubert, en prenant comme points de départ tous les tableaux de *Yamanouchi*  $\begin{smallmatrix} \dots \\ c \dots c \\ b \dots b \\ a \dots a \end{smallmatrix}$ , dont les images commutatives sont les monômes *dominants*  $a^k b^j c^i \dots$ ,  $k \geq j \geq i \geq \dots$ .

Mais pour décrire précisément les tableaux dans le développement d'un polynôme de Schubert  $X_\mu$  non commutatif (en particulier, montrer que c'est une somme positive), on a besoin de faire intervenir les décompositions réduites de  $\mu$ . Ainsi  $\mu = 25143$  a deux décompositions réduites qui sont des tableaux:

|   |   |   |  |
|---|---|---|--|
| 4 |   |   |  |
| 2 |   |   |  |
| 1 | 3 | 4 |  |

|   |   |   |  |
|---|---|---|--|
| 2 | 4 |   |  |
| 1 | 3 | 4 |  |

Le lien entre les deux types de tableaux peut être donné par une construction qui s'applique aussi bien au monoïde plaxique que nilplaxique : elle consiste à faire agir un groupe symétrique soit sur les lignes, soit sur les colonnes des tableaux. L'action des transpositions simples se définit comme la transformation d'un tableau à deux lignes (resp. deux colonnes) en un contretableau. Ainsi l'on a, grâce au jeu de taquin,

|   |   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|---|---|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| 7 |   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 5 |   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 3 | 6 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 2 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

 $\equiv$ 

|   |   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|---|---|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| 7 |   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 5 | 6 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 3 |   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 2 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

 $\equiv$ 

|   |   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|---|---|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| 7 |   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 5 | 6 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 3 |   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 2 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

 $\equiv$ 

|   |   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|---|---|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| 7 |   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 5 | 6 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 3 |   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 2 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

 $\equiv$ 

|   |   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|---|---|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| 5 |   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 7 | 6 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 3 |   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 2 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

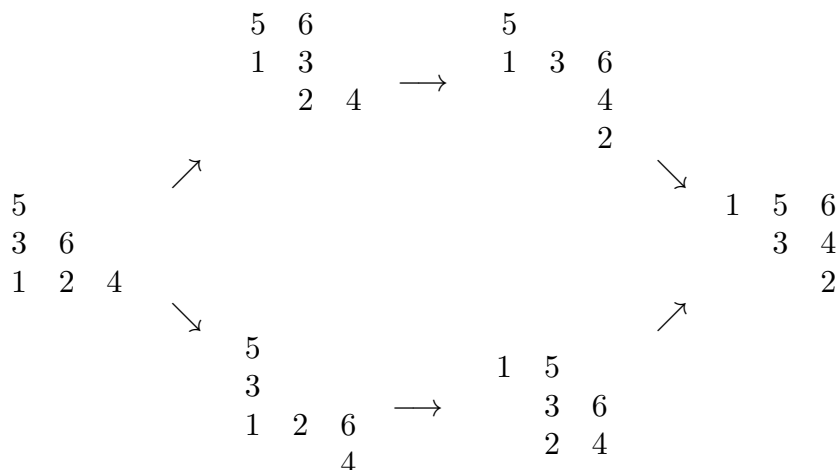
 $\equiv$ 

|   |   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|---|---|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| 5 |   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 7 | 6 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 3 |   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 2 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

 $\equiv$ 

|   |   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|---|---|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| 5 |   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 7 | 6 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 3 |   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 2 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Répétant ces opérations, on obtient une action du groupe symétrique :



Si l'on revient au taquin à deux colonnes, on remarque que, *de constructio*, les deux colonnes de droite sont emboîtées, et qu'il en est de même des colonnes de gauche par

symétrie. Ainsi, la colonne  $\begin{smallmatrix} 6 \\ 4 \end{smallmatrix}$  est contenue dans la colonne  $\begin{smallmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{smallmatrix}$ , et  $\begin{smallmatrix} 5 \\ 1 \end{smallmatrix}$  est contenue dans la colonne  $\begin{smallmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{smallmatrix}$ .

Les colonnes de droite figurant dans l'hexagone ci-dessus sont donc emboîtées; en d'autres termes, ce sont les colonnes d'une *clef* de même forme que le tableau qui est dite *clef droite* du tableau de départ.

L'emboîtement des colonnes gauches permet de même de définir la *clef gauche* du tableau. Pour l'exemple en cours, le tableau est  $\begin{smallmatrix} 5 \\ 36 \\ 124 \end{smallmatrix}$ , la clef gauche est  $\begin{smallmatrix} 5 \\ 35 \\ 111 \end{smallmatrix}$  et la clef droite  $\begin{smallmatrix} 6 \\ 46 \\ 244 \end{smallmatrix}$ .

On peut noter, et c'est aussi une conséquence triviale tout autant que remarquable du taquin, que la clef gauche d'un tableau est inférieure à sa clef droite [L& S10-11].

Les clefs correspondent bijectivement aux permutations, ce qui permet de lier la combinatoire des tableaux aux propriétés de l'ordre d'Ehresmann (dit aussi de Bruhat) sur le groupe symétrique. En particulier, on a besoin, en géométrie, des chaînes de permutations pour décrire la postulation des variétés de Schubert ([D1], [D2], [LMS]).

Quoique nous ayons obtenu les polynômes de Schubert non commutatifs comme suite directe de [L& S4], ceux-ci n'ont été soumis à publication que bien postérieurement [L& S9], car il subsiste un problème toujours non tranché : dans quelle catégorie peut-on simultanément utiliser les opérateurs  $\partial_\mu$  et  $\pi_\mu$  ?

Ceci est grave, car pour un géomètre, l'anneau de cohomologie et l'anneau de Grothendieck de la variété de drapeaux sont deux interprétations différentes de l'anneau des polynômes.

Le préordre sur les permutations mentionné plus haut fournit facilement la partie symétrique stable d'un polynôme de Schubert. En particulier, si l'on part d'une permutation qui est un produit direct de deux permutations grassmanniennes, le polynôme de Schubert correspondant est le produit de deux fonctions de Schur et le préordre donne un algorithme de décomposition de ce produit différent de la fameuse *Règle de Littlewood-Richardson* [L& S6]. Plutôt qu'un produit direct de permutations grassmanniennes, A.Kohnert [Ko1] prend le cas de polynômes de Schubert images par différences divisées de fonctions de Schur, ce qui lui permet de donner la version duale de la règle de Littlewood-Richardson exprimant le développement d'une fonction de Schur gauche (c'est l'algorithme très performant utilisé dans le système SYMMETRICA dont Kohnert est le maître d'oeuvre).

Remarquant que le produit scalaire avec un polynôme de Schubert peut s'écrire comme l'action d'une différence divisée, puisque celles-ci sont auto-adjointes, on traduit le fait que les polynômes de Schubert sont une base auto-adjointe en une formule d'interpolation pour les polynômes de plusieurs variables:

$$P(B) = \sum_{\mu} \pm \partial_{\mu}(P(A)) \cdot X_{\mu}(A, B) .$$

Dans le cas des fonctions d'une variable, cette formule coïncide très exactement avec l'interpolation de Newton. Toutefois, dans ce dernier cas, seules apparaissent les différences divisées correspondant aux cycles  $\mu = 2 \cdots n \ 1 \ n+1 \cdots$ ; les polynômes obtenus par Newton :  $(a_1 - \beta)(a_2 - \beta) \cdots (a_n - \beta)$  sont bien des polynômes de Schubert.

Ce nom illustre et leur concision par rapport aux polynômes de Demazure et Bernstein-Gelfand-Gelfand devrait, à notre sens, donner motif à la reconnaissance de leur pedigree (si ce franglais est permis au Québec) par les savants anglo-saxons.

C'est l'interprétation des fonctions de Schur en termes de représentations qui justifie le fait que ces fonctions portent le nom de Schur et non de leurs "découvreurs" Cauchy et Jacobi. Pour les polynômes de Schubert, le lien avec la théorie des représentations est établi par Kraskiewicz et Pragacz [Kr-Pr] et sera certainement l'objet de développements importants.

Une autre approche [L& S8] consiste à partir de l'expression des polynômes de Schubert dans la base des produits de fonctions élémentaires (pour des drapeaux d'alphabets); on obtient des modules tout autant que des sommes de tableaux, en remplaçant les fonctions élémentaires par des puissances extérieures de modules libres, ou par des sommes de tableaux-colonnes. Par exemple, le polynôme de Schubert  $X_{31452}$  est égal à  $(abc + abd + acd + bcd) \cdot (a) - (abcd)$ ; on obtient le module correspondant comme conoyau du morphisme

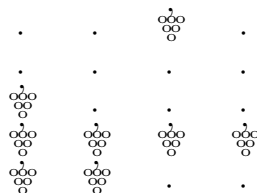
$$\Lambda^3(V_4) \otimes V_1 \longleftarrow \Lambda^4(V_4) \longleftarrow 0$$

et les tableaux à l'aide de l'identité dans l'algèbre plaxique :

$$\frac{3}{2} \frac{2}{11} + \frac{4}{2} \frac{2}{11} + \frac{4}{3} \frac{3}{11} \equiv \left( \frac{3}{1} + \frac{4}{1} + \frac{4}{1} + \frac{4}{2} \right) \cdot 1 - \frac{4}{2} \frac{3}{1}$$

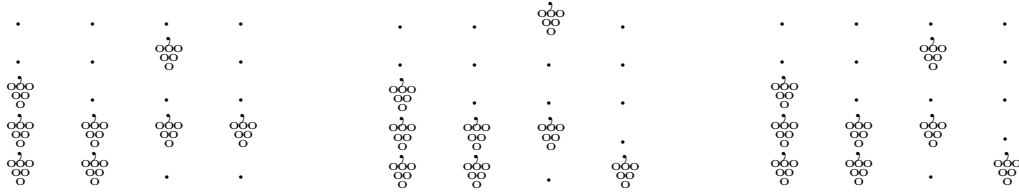
En fait, l'objet principal de l'article [L& S8] est de donner une formule de dualité entre monoïdes plaxique et nilplaxique et de montrer la possibilité d'un "calcul de Schubert" en les variables non commutatives que sont les différences divisées élémentaires.

Cent quatre vingt huit ans après Rothe, la combinatoire du groupe symétrique s'enrichit d'un nouvel apport lotharingien avec les "Weintrauben" d'A. Kohnert [Ko2]. Au lieu d'inscrire des informations dans les boîtes ou grappes du diagramme de Rothe & Riguet, on déforme celui-ci avec la règle on ne peut plus élémentaire suivante : toute grappe la plus à droite de son niveau doit un jour ou l'autre choir d'un étage, poussant éventuellement les grappes dans la même colonne qui gênent son mouvement. De chaque Weintraub ainsi obtenu, on peut lire plusieurs informations, en particulier un mot : lire par colonnes, de droite à gauche, la suite des niveaux où se trouve une grappe. Ce mot est transformé ensuite en tableau à l'aide de l'algorithme de Schensted ou par le jeu de taquin. Ainsi la permutation  $\mu = 362154$  a pour diagramme de Rothe & Riguet



qui produit dix autres Weintrauben dont les premiers sont :





et la lecture de ces quatre Weintrauben donne les mots et tableaux suivants:

$$\begin{array}{lcl}
 25221321 \equiv \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 5 \\ \hline 3 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline \end{array} & ; & 24221321 \equiv \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 \\ \hline 3 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline \end{array} ; \\
 \\ 
 15221321 \equiv \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 5 \\ \hline 3 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} & ; & 14221321 \equiv \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 \\ \hline 3 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} .
 \end{array}$$

Kohnert prouve dans sa thèse que dans le cas d'une permutation vexillaire, on obtient bien le polynôme de Schubert non commutatif obtenu en [L& S9]. Les ingrédients pour conclure le cas général sont maintenant réunis, mais il est plus intéressant d'explicitier les liens étroits entre les Weintrauben et les nouvelles constructions sur les polynômes de Schubert obtenues récemment, plutôt que de donner une preuve indépendante.

Un point de vue entièrement différent est dû à Fulton qui retourne aux sources du “calcul de Schubert”. Etant donnée une matrice, disons dont les éléments sont des polynômes, Schubert, puis de manière beaucoup plus approfondie, Giambelli [Gi], ont examiné la variété définie par l'annulation des mineurs d'un certain ordre de cette matrice. Si l'on considère la matrice comme représentant un morphisme  $\phi$  de fibrés vectoriels, c'est la stratification des points de la variété de base en fonction du corang de  $\phi$  que l'on cherche à décrire. Si l'on filtre le morphisme par un drapeau source et un drapeau but, on a plus généralement à décrire le rang de familles de mineurs de la matrice de départ. Le problème est tout d'abord de décrire ce que l'on entend par “conditions de rang”. La réponse est apportée par Fulton [Fu] : évaluer le rang des sous-matrices prises sur des lignes et des colonnes consécutives à partir de l'origine. Dans le cas, en fait générique, d'une matrice de permutation, les coins des composantes connexes du diagramme de la permutation (que Fulton appelle *points essentiels*, contiennent l'information voulue. En d'autres termes, pour la permutation  $\mu = 764198532$  qui nous sert d'exemple générique, il suffit de connaître la valeur du rang en les grappes qui ont été remplacées par la valeur de ce rang :

|                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |   |   |   |   |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|---|---|---|---|
| —                                                                                 | —                                                                                 | —                                                                                 | —                                                                                 | —                                                                                 | — | — | — | — |
| —                                                                                 | 1                                                                                 | —                                                                                 | —                                                                                 | —                                                                                 | — | — | — | — |
| —                                                                                 |  | 1                                                                                 | —                                                                                 | —                                                                                 | — | — | — | — |
| —                                                                                 |  |  | —                                                                                 | 2                                                                                 | — | — | — | — |
| —                                                                                 |  |  | —                                                                                 |  | — | — | 4 | — |
| —                                                                                 | —                                                                                 | —                                                                                 | —                                                                                 | —                                                                                 | — | — | — | — |
|  |  | 0                                                                                 | —                                                                                 | —                                                                                 | — | — | — | — |
|  |  |  |  | 0                                                                                 | — | — | — | — |
|  |  |  |  |  | 0 | — | — | — |

Une fois éclaircie la notion de rang, la géométrie peut développer ses puissantes méthodes et aboutir à l'interprétation des polynômes de Schubert doubles comme classes dans l'anneau de cohomologie des sous-variétés correspondant à des conditions de rang appropriés pour un morphisme entre drapeaux de fibrés vectoriels.

D'autres applications des polynômes de Schubert sont données dans [A-L-P] et [L-P].

Le statut social de Schubert s'améliora considérablement, du jour où commencèrent à circuler les notes de I.G.Macdonald [M] concernant les polynômes du même nom. Rédigées avec la même élégance, clarté et précision que le livre "Symmetric Functions and Hall polynomials" dont elles constituent une suite naturelle, elles suscitèrent immédiatement l'intérêt sur de nombreux continents – on a signalé des photocopies pirates à l'université de Gifu, préfecture de Nagoya.

Un des apports essentiels de ces notes concerne les chemins du permutoèdre. Macdonald découvre que la fonction génératrice du nombre de ces chemins, les arêtes étant convenablement pondérées, est égale à la spécialisation du polynôme de Schubert en l'alphabet  $\{1, \dots, 1\}$ . Changeant ensuite le poids des arêtes, il énonce ensuite la conjecture profonde que l'on trouve ainsi la spécialisation des polynômes de Schubert en  $\{1, q, q^2, \dots\}$ . Elle vient d'être prouvée dans des articles non encore publiés que je ne peux qu'évoquer rapidement (les chemins pour l'ordre d'Ehresmann sont aussi liés aux polynômes de Schubert, cf. [L& S3]).

Durant l'été 91, R.Stanley proposa une énumération élégante des monômes apparaissant dans le développement d'un polynôme de Schubert. A chaque décomposition réduite  $s = s_1 s_2 \dots s_r$ , Stanley associe l'ensemble  $W(s)$  des mots décroissants  $w$  dominés (composante à composante) par  $s$  et ayant des décroissances contraintes aux décroissances de  $s$ , c'est-à-dire des mots tels que

$$s_i \geq w_i \quad ; \quad s_i > s_{i+1} \Rightarrow w_i > w_{i+1}$$

Par exemple,  $s = \sigma_5 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_5 \sigma_1 \sigma_2$  majore les mots décroissants 5 3 2222 11 et 4 3 2222 11 et  $s = \sigma_5 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_5$  majore les mots décroissants 5 3 222 111 et 4 3 222 111.

En utilisant le tableau d'insertion du mot  $s$ , on obtient des tableaux plutôt que de simples mots. La conjecture de Stanley, prouvée dans [B-J-S], est que la somme  $\sum_{s, w \in W(s)} w$ , où  $s$  parcourt l'ensemble des décompositions réduites de  $\mu^{-1}$ , est égale au polynôme de Schubert  $X_\mu$ .

On découvre alors que les quatre mots que nous venons de donner produisent très exactement les quatre tableaux obtenus à l'aide des Weintrauben quelques lignes plus haut.

Plutôt que d'invoquer le hasard, on peut tout d'abord remarquer que la majoration par les décompositions  $s$  est redondante. Comme l'ont montré [R-S], il suffit de remplacer les tableaux qui sont des décompositions réduites par leurs clefs gauches, puis de considérer les classes plaxiques de ces dernières. Ceci revient à remplacer les deux décompositions réduites  $s = \sigma_5 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_5 \sigma_1 \sigma_2$  et  $s = \sigma_5 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_5$  par les mots 5 3 2222 11 et 5 3 222 111 qui majorent les mêmes mots décroissants.

Donnons un autre exemple, complet : pour  $\mu = 412365$ , les décompositions réduites sont  $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_5$ , qui est le tableau ligne 

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|

 seul dans sa classe, et  $\sigma_5 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ ,  $\sigma_1 \sigma_5 \sigma_2 \sigma_3$ ,  $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_5 \sigma_3$  dans la classe du tableau 

|   |   |   |
|---|---|---|
| 5 |   |   |
| 1 | 2 | 3 |

.

Les clefs gauches sont 

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
|---|---|---|---|

 et 

|   |   |   |
|---|---|---|
| 5 |   |   |
| 1 | 1 | 1 |

, dont les classes plaxiques sont respectivement  $\{1111\}$  et  $\{5111, 1511, 1151\}$ . Ceci donne instantanément  $X_{412365} = a_1 a_1 a_1 a_1 + a_5 a_1 a_1 a_1 + a_4 a_1 a_1 a_1 + a_3 a_1 a_1 a_1 + a_2 a_1 a_1 a_1$ , et illustre le lien entre la construction de Stanley et [L& S9-10].

Reiner et Shimozono [R-S] étudient en outre les propriétés des polynômes-clefs ("Key polynomials"), pour donner en particulier le développement d'une fonction de Schur drapeau gauche. L'apport essentiel de leur article me semble toutefois l'interprétation directe des polynômes clefs comme caractères, sans recourir comme le faisait Demazure [D1] aux sections des fibrés inversibles au dessus des variétés de Schubert, mais par généralisation de la construction par Young de ses fameux idempotents.

La preuve par Fomin et Stanley [Fo-S] de la conjecture de Macdonald repose sur le choix de  $X^{FS} = (1+a\partial_2)(1+a\partial_1)(1+b\partial_2)$  comme élément de départ, les différences divisées étant relatives à un deuxième alphabet. Malgré la non-commutativité des  $\partial_i$ , il est facile de faire agir sur  $X^{FS}$  les différences divisées relatives à l'alphabet  $\{a, b, c\}$ . L'ingrédient essentiel du calcul est la relation de Yang-Baxter

$$(1 + x\partial_2)(1 + (x + y)\partial_1)(1 + y\partial_2) = (1 + y\partial_1)(1 + (x + y)\partial_2)(1 + x\partial_1) ,$$

pour tous paramètres  $x, y$  indépendants de l'alphabet sur lequel agissent les  $\partial_i$  (pour des relations plus générales, voir [B-K]).

Les liens entre équation de Yang-Baxter et polynômes de Schubert sont développés dans [F-K].

Nous voici donc arrivés aux frontières de la physique moderne. Je laisse à de plus compétents que moi le soin d'évoquer l'importance des algèbres de Hecke en théorie des cordes, des noeuds et des énergies inépuisables et non polluantes.

## Bibliographie

[A-L-P] E.AKYILDIZ, A.LASCOUX, P.PRAGACZ, Cohomology of Schubert subvarieties of  $GL_n/P$  (1989), to appear in *J. of Diff.Geometry*.

- [Ar] A. ARABIA, Cycles de Schubert et Cohomologie  $K$ -équivariante de  $K/T$ , *Inv. Math.* **85**, 39-52(1986).
- [B-K] A.BERENSTEIN, A.KIRILLOV, Groups generated by involutions, Gelfand-Tsetlin patterns and combinatorics of Young tableaux, *preprint RIMS-866*, Kyoto (1992).
- [B-G-G] I.N.BERNSTEIN, I.M.GELFAND, S.I.GELFAND, Schubert cells and cohomology of the spaces  $G/P$ , *Uspekhi.Mat.Nauk*, **28** (1973) 3-26.
- [B-J-S] S.BILLEY, W.JOCKUSCH, R.STANLEY, Some combinatorial properties of Schubert polynomials, *prépublication de l'Institut Mittag-Leffler* (1992).
- [Ch] I.CHEREDNIK, A unification of Knizhnik-Zamolodchikov and Dunkle operators via affine Hecke algebras, *Inv. in M.*, (1991).
- [D 1] M.DEMAZURE, Désingularisation des variétés de Schubert, *Annales E.N.S.* **6** 163-172(1974) .
- [D 2] M.DEMAZURE, Une formule des caractères, *Bull.Sc.Math.* **98** 163-172 (1974).
- [D 3] M.DEMAZURE Invariants symétriques entiers des groupes de Weyl et torsion, *Inventiones* **21** 287-301(1973).
- [E-G] P.EDELMAN, C.GREENE, Balanced Tableaux, *Adv.in Math.***63** 42-99 (1987).
- [E] C.EHRESMANN, Sur la topologie de certains espaces homogènes, *Annals of Math.*(2) **35**, 396-443 (1934).
- [Fo-K] S.FOMIN, A.KIRILLOV, Yang-Baxter equation, symmetric functions and Schubert polynomials, *prépublication* (1992).
- [Fu] W.FULTON, Flags, Schubert polynomials, degeneracy loci and determinantal formulas, *Duke M.J.*, **65**, 381-420 (1991).
- [Fo-S] S.FOMIN, R.STANLEY, Schubert polynomials and the nilCoxeter algebra, *prépublication de l'Institut Mittag-Leffler* (1992).
- [Gi] G.Z.GIAMBELLI, Risoluzione del problema degli spazi secanti, *Memorie Acc.Torino*, **52**, 171-211 (1902).
- [Ha] M.D.HAIMAN, Dual equivalence with applications including a conjecture of Proctor, *preprint M.I.T.* (1989).
- [Ke] A.KERBER, Algebraic combinatorics via finite group actions, Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien, Zürich (1991).
- [Ko1] A.KOHNERT, Schubert Polynomials and skew Schur Functions, à paraître.
- [Ko2] A.KOHNERT, Weintrauben, Polynome, Tableaux Bayreuther Mathematische Schriften Vol. 38, p. 1-97 (1991).
- [Ko-K ] B.KOSTANT, S.KUMAR, The Nil Hecke ring and Cohomology of  $G/P$  for a Kac-Moody group  $G$ , *Advances in Math.* **62** 187-237(1986) .
- [Kr1] W.KRASKIEWICZ, Reduced decompositions in hyperoctahedral groups, *C.R. Acad. Sc Paris*, **309**, 903-907 (1989).
- [Kr2] W.KRASKIEWICZ, Reduced decompositions in Weyl groups, *preprint*, Torun, (1991).
- [Kr-Pr] W.KRASKIEWICZ, P.PRAGACZ : Foncteurs de Schubert, *C.R. Ac.Sc.Paris* **304**, 209-211 (1987).
- [L-M-S] V.LAKSHMIBAI, C.MUSILI, C.S.SESHADRI, Geometry of  $G/P$  IV, *Proc.Indian Acad.Sc.* **88A**, 280-362 (1979).

- [L1] A.LASCOUX, Classes de Chern des variétés de drapeaux, *Comptes Rendus* **295** (1982) 393
- [L2] A.LASCOUX, Anneau de Grothendieck de la variété de drapeaux, in *The Grothendieck Festschrift*, vol III, Birkhäuser(1990) 1-34.
- [L-P] A.LASCOUX, P.PRAGACZ, Divided differences and ideals generated by symmetric polynomials, *prePublications of Bergen University*, n° 59-25-04-91 (1991), à paraître dans *Discrete Math.*
- [L&S1] A.LASCOUX &M.P.SCHÜTZENBERGER, Polynômes de Kazdan-Lusztig pour les grassmanniennes, in *Tableaux de Young et Foncteurs de Schur, Torun1980, Astérisque* **87-88**(1981).
- [L&S2] , Polynômes de Schubert, *Comptes Rendus* **294** 51982) 447.
- [L&S3] , Symmetry and Flag manifolds, in *Invariant Theory, Springer L.N.* **996** (1983) 118-144.
- [L&S4] , Structure de Hopf..., *Comptes Rendus* **295** (1982) 629.
- [L&S5] , Interpolation de Newton à plusieurs variables, *Séminaire d'Algèbre M.P. Malliavin 1983-84, Springer L.N.* **1146** (1985) 161-175.
- [L&S6] , Schubert polynomials and the Littlewood-Richardson rule, *Letters in Math. Phys.* **10**, 111-124(1985).
- [L&S7] , Symmetrization operators on polynomial rings, *Funct. Anal.* **21** , 77-78(1987).
- [L&S8] , Fonctorialité des polynômes de Schubert, *Contemporary Maths* **88** , 585-598(1989).
- [L&S9] , Tableaux and non commutative Schubert Polynomials, *Funk. Anal* **23** (1989) 63-64.
- [L&S10] , Keys and Standard Bases, in "Invariant Theory and Tableaux", IMA vol. in Maths and Appl. **19** , Springer,125-144 (1990) .
- [L&S11] , Arêtes et Tableaux, 20<sup>ème</sup> Séminaire Lotharingien de Combinatoire, Alghero (sept.1988) 109-120.
- [L&S12] , Algèbre des différences divisées, *Discrete Math.* **99** , 165-179 (1992).
- [M] I.G.MACDONALD, Notes on Schubert polynomials, *Publications du LACIM, Montréal*, (1991).
- [MT] L.M.MILNE-THOMSON, The calculus of finite differences, London (1933).
- [N] Z.NEWTON, Philosophiae Naturalis Principia Mathematica , Liber III, Lemma V, p.481-83, London (1687).
- [P-R] P.PRAGACZ, J.RATAJSKI, Pieri for isotropic Grassmannians; the operator approach, MPI Preprint Series 92-9 (1992).
- [Re-S] V.REINER, M.SHIMOZONO, Key polynomials and a flagged Littlewood-Richardson rule, *preprint* (1992).
- [Ro] H.A.ROTHER, Ueber permutationen, in Beziehung auf die Stellen ihrer Elemente, *Sammlung combinatorisch -analytischer Abhandlungen, Leipzig*, (1800).
- [St] R.STANLEY, On the number of reduced decompositions of elements of Coxeter groups, *Journal Europ. de Comb.* **5**, 359-372 (1984).
- [Wa] M.WACHS, Flagged Schur functions, Schubert polynomials, *J.of Comb. theory* **A 40**, 276-289 (1985).
- [Ze] A.ZELEVINSKY, Representations of finite classical groups, *Springer L.N.* **869** (1981).