

GÉOMÉTRIE ALGÈBRE. — *Polynômes symétriques et coefficients d'intersection de cycles de Schubert.* Note (*) de M. **Alain Lascoux**, présentée par M. Henri Cartan.

On explicite les liens entre les cycles de Schubert et les polynômes symétriques, en introduisant des opérateurs de translation qui permettent aussi d'étudier la structure des λ -anneaux.

0. INTRODUCTION. — Lorsque dans un anneau de cohomologie, l'on rencontre un déterminant isobare, on est souvent amené à faire agir un opérateur isobare et à tirer des identités remarquables du développement de cette action suivant les lignes ou des colonnes du déterminant. C'est le principe du théorème 2.

Nous nous intéressons ici aux deux familles d'opérateurs U_i et T_i : Soient M un entier, E le groupe commutatif libre engendré par N^M . Un élément $I = (i_1, \dots, i_M)$ de N^M est dit de poids $|I| = \sum i$ et de longueur $l(I) = \text{card} \{ k \in (1, \dots, M), i_k \neq 0 \}$.

On définit un homomorphisme U_i de E dans $\text{End } E$, en associant à tout $I \in N^M$, $U_i I \in \text{End } E$ défini par

$$\forall J \in N^M, \quad U_i(J) = \sum_{\sigma} (j_1 + \sigma(i_1), \dots, j_M + \sigma(i_M)),$$

où σ parcourt les classes du groupe symétrique $\mathfrak{S}(1, \dots, M)$ modulo le stabilisateur $\mathfrak{S}(I)$ de I .

Pour $j \in N$, on pose

$$T_{0, \dots, 0, j} = T_j = \sum_{|I| = j} U_i$$

où $I \nearrow$ désigne les multi-indices croissants, et

$$\forall J \in N^M, \quad T_J = \det \begin{vmatrix} T_{j_1} & T_{j_2+1} & \dots & \dots \\ T_{j_1-1} & T_{j_2} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & T_{j_M} \end{vmatrix},$$

avec la convention que $T_{j-k} = 0$ pour $k > j$, le déterminant étant développé suivant les lignes. Cela nous permet de définir par linéarité un deuxième homomorphisme,

$$T : E \rightarrow \text{End } E.$$

1. PROBLÈMES. — Dans les exemples que nous allons donner, il nous faudra :

(i) exprimer les opérateur T_i en fonction des U_j :

$$T_i = \sum_{J \nearrow} \binom{J}{I} U_J;$$

(ii) exprimer les $T_i T_j$ en fonction des T_K :

$$T_i T_j = \sum_{K \nearrow} \binom{K}{I; J} T_K,$$

les U_j , $J \nearrow$, ou T_j , $J \nearrow$ formant en effet une $\mathbb{Z}$ -base de la sous algèbre $\mathbb{Z}[T, U]$ de $\text{End } E$ engendrée par les T_i et les U_i . Nous obtiendrons en outre les U_j en fonction des T_i .

2. LIEN AVEC LES POLYNÔMES SYMÉTRIQUES. — Soient M lettres $a, b, \dots, d$, $I \in \mathbb{N}^M$, u_I le polynôme symétrique

$$\sum_{\sigma} a^{\sigma(i_1)} b^{\sigma(i_2)} \dots d^{\sigma(i_M)}, \quad \sigma \in \mathfrak{S}(1, \dots, M) / \mathfrak{S}(I).$$

Le polynôme

$$t_{(0, \dots, 0, j)} = t_j = \sum_{|I| = j} u_I$$

est appelé puissance symétrique j -ième de $a+b+\dots+d$. C'est la somme de tous les monômes distincts de poids j . On note, pour $I \in \mathbb{N}^M$, par t_I le déterminant

$$\begin{vmatrix} t_{i_1} & \dots & t_{i_M+M-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{i_1-1} & \dots & t_{i_M} \end{vmatrix}$$

et l'on définit par linéarité t_z et u_z pour $z \in E$. On peut considérer E comme le groupe sous-jacent à l'algèbre P des polynômes en $a, b, \dots$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[t, u]$ désignant la sous-algèbre engendrée par les t_I et les u_I . Notons enfin, pour tout polynôme $P \in P$, μ_P l'endomorphisme de P défini par la multiplication par P .

PROPOSITION 1. — L'application $P \rightarrow \mu_P$ induit un isomorphisme de

$$\mathbb{Z}[t, u.] \quad \text{sur} \quad \mathbb{Z}[T, U].$$

COROLLAIRE :

- (i) $\mathbb{Z}[T, U]$ est une algèbre commutative.
- (ii) $\forall z \in E, z \neq 0$, l'évaluation en z est injective :

$$\forall \varphi \in \mathbb{Z}[T, U], \quad \varphi \neq 0, \quad \varphi(z) \neq 0.$$

(iii) Les coefficients cherchés au paragraphe 1 sont ceux des développements de t_I et $t_I \cdot t_J$ suivant les bases correspondantes.

(iv) L'homomorphisme $z \rightarrow T_z$ de E dans $\mathbb{Z}[T]$ est un homomorphisme de $\mathbb{Z}[T]$ modules, i. e. $\forall I, J \in \mathbb{N}^M, T_J T_I = T_{T_J(I)}$.

En vertu de (ii), (iv) se vérifie en évaluant les opérateurs en $I = (0, \dots, 0)$.

PROPOSITION 2. — Pour tout $I \nearrow, J \nearrow \in \mathbb{N}^M$, on a

$$t_I \cdot t_J = \det \begin{vmatrix} t_{i_1+j_M} & \dots & t_{i_M+M-1+j_M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{i_1-M+1+j_1} & \dots & t_{i_M+j_1} \end{vmatrix}.$$

Nous avons montré cette proposition dans [(2), § 5-6]; indiquons-en une autre démonstration :

Soient A un anneau et $f_1, \dots, f_M$ M applications de $\mathbb{N}$ dans A . On définit trois $\mathbb{Z}$ -morphisms V^F, U^F et T^F de E dans A par

$$\forall I \in \mathbb{N}^M, \quad V^F(I) = \det \begin{vmatrix} f_1(i_1) & f_1(1+i_2) & \dots & f_1(M-1+i_M) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_M(i_1) & f_M(1+i_2) & \dots & f_M(M-1+i_M) \end{vmatrix},$$

en convenant d'un mode de développement du déterminant si A n'est pas commutatif,

$$U^F(I) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}/\mathfrak{S}(I)} V^F(\sigma(I)) \quad \text{et} \quad T^F(I) = \sum_{J \neq I} \binom{I}{J} U^F(J).$$

On définit trois autres morphismes $\tilde{V}^F$, $\tilde{U}^F$ et $\tilde{T}^F$ par

$$\forall I \in \mathbb{N}^M, \quad \tilde{V}^F(I) = \det \begin{vmatrix} f_1(i_1) & \dots & f_1(M-1+i_1) \\ \vdots & & \vdots \\ f_M(i_M) & \dots & f_M(M-1+i_M) \end{vmatrix}$$

et

$$\tilde{U}^F(I) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}/\mathfrak{S}(I)} \tilde{V}^F(\sigma(I)), \quad \tilde{T}^F(I) = \sum_{J \neq I} \binom{J}{I} \tilde{U}^F(J).$$

THÉORÈME :

- (i) $T^F = \tilde{T}^F \quad \text{et} \quad U^F = \tilde{U}^F.$
- (ii) $T^F(I) = V^F(I).$

On démontre (i) en développant les déterminants; on a la même somme de monômes. Quant à (ii), il suffit de remarquer que V se factorise par $Z[t.]$ et que $T_{T_1(0, \dots, 0)} = T_1$ d'après le corollaire (iv) de la proposition 1.

On obtient la proposition 2 en prenant

$$A = Z[t.], \quad f_1(i) = t_{j_{1M}+i}, \dots, f_M(i) = t_{j_1+i}.$$

3. FORMULE DE JACOBI. — Soit, pour $I \in \mathbb{N}^M$,

$$\Delta_I = \det \begin{vmatrix} a^{0+i_0} a^{1+i_1} & \dots & a^{M-1+i_M} \\ \vdots & & \vdots \\ a^{0+i_0} & \dots & a^{M-1+i_M} \end{vmatrix}.$$

PROPOSITION 3 [Jacobi (¹)] :

$$\forall I \in \mathbb{N}^M, \quad t_1 = \frac{\Delta_I}{\Delta_{(0, \dots, 0)}}.$$

C'est un corollaire du théorème précédent :

$$\Delta_I = T_I(\Delta_{(0, \dots, 0)}),$$

et l'opérateur T_1 est la multiplication par t_1 dans P .

Pour reprendre une notation classique,

$$\Delta_{(0, \dots, 0)} = \zeta^{1/2}(a, b, \dots, d) \quad [= (a-b) \dots (a-d)(b-c) \dots].$$

La formule de Jacobi nous fournit la réponse aux problèmes du paragraphe 1 par la division de polynômes

$$t_1 = \frac{\Delta_I}{\zeta^{1/2}(a, \dots, d)} = \sum_{J \neq I} \binom{J}{I} u_J$$

et

$$\frac{\Delta_I \cdot \Delta_J}{\zeta^{1/2}(a, \dots, d)} = \sum_{K \nearrow} \binom{K}{I; J} \Delta_K.$$

Remarque. — Les coefficients trouvés, pour des suites $I \nearrow, J \nearrow, K \nearrow$, sont positifs, ce qui se démontre par récurrence sur M .

4. APPLICATION AUX CYCLES DE SCHUBERT. — Soient E un espace vectoriel, $G_M(E)$ la grassmannienne des M -quotients de E , Q le fibré tautologique de rang M de classe de Chern $(1+a) \dots (1+d)$ dans l'anneau de Chow de $G_M(E)$.

On a vu dans ⁽²⁾ qu'à tout $I \nearrow \in N^M$ correspondait un cycle de Schubert :

$$\Omega(I) = (-1)^{|I|} \det \begin{vmatrix} c_{i_1}(-Q) & \dots & c_{i_M+M-1}(-Q) \\ \vdots & & \vdots \\ c_{i_1-M+1}(-Q) & \dots & c_{i_M}(-Q) \end{vmatrix} = t_I$$

avec les notations du paragraphe 2, puisque $c_i(-Q) = t_i$.

PROPOSITION 4 :

$$\Omega(I) \cdot \Omega(J) = T_I(\Omega(J)) = \sum_{K \nearrow} \binom{K}{I; J} \Omega(K).$$

Remarque. — Le tableau d'intersection des Ω s'obtient en « divisant » par les relations $c_i(E-Q)=0$ pour tout i , $\text{rg } E - M < i \leq \text{rg } E$, l'anneau de Chow de $G_M(E)$ étant l'anneau des polynômes en $c_j(Q)$, $1 \leq j \leq M$, divisé par ces relations. Nous aurions le même calcul si nous avions exprimés Ω en fonction de $\lambda^i(-Q)$ dans $K(G_M(E))$.

Nous montrerons dans une prochaine publication comment étudier pareillement les représentations irréductibles du groupe symétrique et du groupe linéaire, leurs caractères, leurs rangs, leurs produits, en les écrivant sous forme de déterminants sur lesquels opèrent T et U . Cela nous permet, étant donné un fibré E de retrouver les fibrés $T_i(E)$ d'Hartshorne; en passant à l'anneau de Grothendieck, de définir des opérateurs T' et U' (parmi lesquels les fonctions ψ_k d'Adams) et enfin de calculer les polynômes universels $\lambda^i[\pm \lambda^j(\pm x)]$ et $\lambda^i(xy)$ dans cet anneau.

(*) Séance du 17 juin 1974.

(¹) JACOBI, *De functionibus alternantibus...* (Crelle J., 1841).

(⁶) A. LASCoux, *Puissances extérieures, déterminants et cycles de Schubert* (à paraître au *Bull. Soc. Math. Fr.*).

(³) MUIR, *Theory of determinants* (réimprimé par Dover) : chapitres sur les alternants.

Département de Mathématiques,
Université Paris VII,
Tour 45-55,
2, place Jussieu,
75221 Paris-Cedex 05.