

## PRODUIT DE KRONECKER DES REPRESENTATIONS

### DU GROUPE SYMETRIQUE

par A. Lascoux

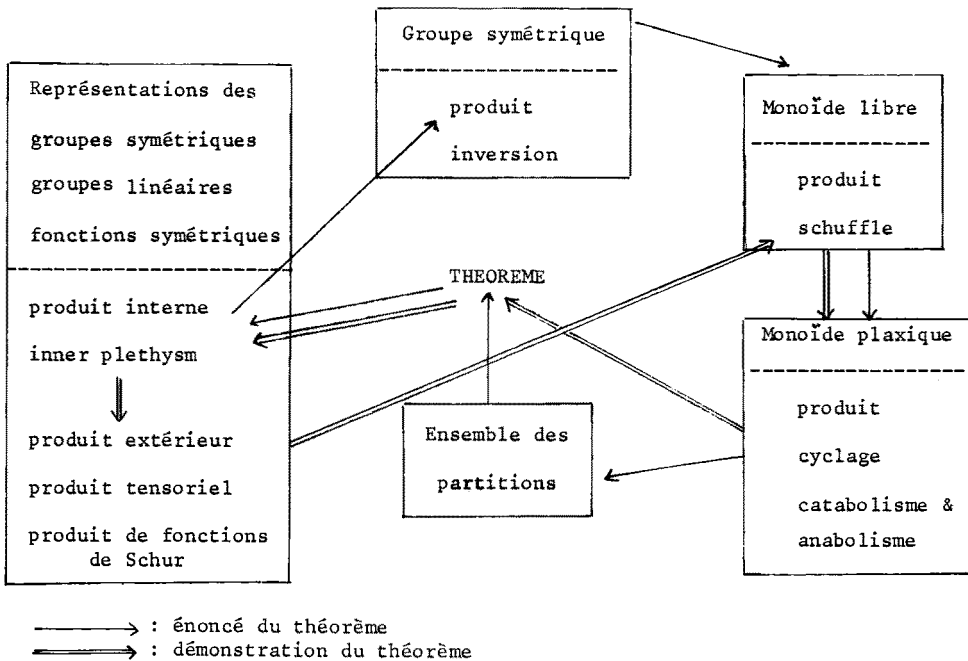
Préambule - Le problème examiné ci-dessous est depuis le début du siècle considéré trouver sa solution dans la formule d'orthogonalité des caractères due à Frobenius : il est proposé de calculer un certain entier positif en multipliant terme à terme trois colonnes de la table des caractères du groupe symétrique et en sommant les entiers obtenus. Outre que cette méthode ne permet pas de comprendre pourquoi l'opération conduit à des entiers positifs, elle a le fort désavantage de nécessiter la connaissance de la table complète des caractères (tableau 600 x 600 pour  $\tilde{G}_{20}$ , le dernier que l'on connaisse actuellement ; 600 x 2 multiplications suivies de 600 additions pour obtenir un entier qui a de très fortes chances d'être inférieur à 10 !).

C'est une des raisons pour laquelle l'auteur et M.P. Schützenberger s'intéressent à la combinatoire des tableaux de Young, le présent travail faisant partie de cette étude. Malheureusement, la solution apportée n'est que partielle,

contrairement au cas du produit "externe" (règle de Littlewood-Richardson-Schützenberger, voir l'annexe). Nous renvoyons au Colloque de Strasbourg pour les développements de la théorie des tableaux jusqu'en 1976 (2).

Le mot "produit" associé au concept de groupe symétrique, peut s'entendre de nombreuses manières : produit dans le groupe tout d'abord, mais aussi produit des représentations, produit de groupes symétriques qui induit un produit "externe" de représentations, etc..., sans compter que chacune de ces opérations a sa traduction en terme de caractères, de polynômes symétriques, de groupe linéaire, ou de monoïde libre et même plaxique.

Nous étudions ici le produit dit de Kronecker (produit des caractères, ou produit "interne" des représentations) en adoptant un point de vue qui présente l'avantage de relier différentes opérations élémentaires, comme l'indique le diagramme suivant :



Nous énonçons sans plus attendre le théorème central, les explications nécessaires à la compréhension du discours étant apportées au fil de la démonstration, et nous renvoyons à l'annexe, pour les définitions relatives au monoïde plaxique, tableaux de Young et représentations, le lecteur non familier de cette théorie (renvoi figuré par le signe  $(A_i)$ ).

THEOREME - Soient  $I, J, H$  des partitions de même poids  $n$ ,  $I$  et  $J$  étant des équerres, et soit  $(I, J, H)$  le coefficient de Clebsch-Gordan indexé par ce triple du groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$ .

Alors, l'ensemble des mots :

$$\{w.w' : \overline{wR} = I, \overline{w'R} = J, w \text{ et } w' \text{ hyperstandards}\}$$

contient exactement  $(I, J, H) \times \dim H$  mots  $w''$  tels que  $\overline{w''R} = H$ .

(les mots standards, à fortiori hyperstandards, peuvent être considérés comme des éléments de  $\mathfrak{S}_n$  et  $w.w'$  désigne le produit dans  $\mathfrak{S}_n$ ,  $\dim H$  étant la dimension de la représentation irréductible d'indice  $H$  de ce groupe).

Démonstration : L'induction sur les sous-groupes de Schur du groupe symétrique donne une relation entre produit intérieur et produit extérieur des représentations  $(A5, A6)$  (cf. Littlewood, (1)).

Dans le cas où  $I$  et  $J$  sont des équerres  $(A13)$ , cette relation se traduit ainsi :

PROPOSITION - Soit  $J = (1 \dots 1_{n-r})$ , notée  $(1_r^{n-r})$ ,  $J' = (1_{r-1}^{n-r+1})$ ,  $I = (1_{n-p-1}^{p+1})$ , et  $H$  une partition de poids  $n$ , alors la somme des deux coefficients de Clebsch-Gordan  $(A5)$  :

$$(I, J, H) + (I, J', H)$$

est la multiplicité  $(A2)$  de  $H$  dans la représentation suivante :

$$\begin{aligned} & (p+1-r) \times r \times 1_{n-p-1} \oplus (p+2-r) \times (1r-1) \times 1_{n-p-2} \\ & \oplus (p+3-r) \times (11r-2) \times 1_{n-p-3} \oplus \dots \oplus (p+r-r) \times 1_r \times 1_{n-p-r} \end{aligned}$$

( $K \times K' \times K''$  désigne le produit extérieur (A6) des représentations d'indices resp. les partitions  $K, K', K''$ ).

Remarque - La règle de Gamba-Radicatti (cf.1) donne le coefficient  $(I, J, H)$  lorsque l'une des partitions est l'équerre  $1n-1$ .

Nous devons donc, pour démontrer le théorème, le supposant connu par induction sur les équerres pour le triple  $I, J', H$ , caractériser la multiplicité de  $H$  donnée par la proposition comme le cardinal d'un certain ensemble de mots standards (A12)  $w.w'$ . Or pour que  $w'$  soit hyperstandard avec  $w'R = J$  ou  $J'$ , il faut et il suffit d'après (A12) que  $w'$  appartienne à l'ensemble des schuffles (A7)

$$\{(n \dots n-r) \underline{w}(1 \dots n-r-1)\},$$

l'hypothèse sur  $w$  étant équivalente à ce que  $w$  appartienne à l'ensemble des schuffles :

$$\{((n \dots p+2) \underline{w}(1 \dots p)) \ p+1\}.$$

On décompose ce dernier ensemble suivant le facteur droit de  $w$  de longueur  $r$  (supposant par exemple  $r \leq p$ ) :

$$\{((n \dots p+2) \underline{w}(1 \dots p)) \ p+1\} = W_1 \cup \dots \cup W_q$$

avec

$$W_1 = \{((n \dots p+2) \underline{w}(1 \dots p-r+1)) \ p-r+2 \dots p \ p+1\}$$

$$W_2 = \{((n \dots p+3) \underline{w}(1 \dots p-r+2) \ (p+2) \ \underline{w}(p-r+3 \dots p)) \ p+1\}$$

...

$$W_q = \{((n \dots p+1+q) \underline{w}(1 \dots p-r+q)) \ ((p+q \dots p+2) \ \underline{w}(p-r+q+1 \dots p)) \ p+1\}$$

...

Il est alors clair que l'ensemble  $\{w.w' : w \in W_q\}$  n'est autre que :

$$\{(n \dots p+1+q) \underline{w}(1 \dots p-r+q) \ \underline{w}(p+1 \dots (p \dots p-r+q+1) \ \underline{w}(p+2 \dots p+q)) \}$$

Or  $\{p+1 \dots (p \dots p-r+q+1) \ \underline{w}(p+2 \dots p+q)\}$  est l'ensemble des mots dont le redressé (A11) est le tableau équerre  $p+1 \dots p+1-r+q \ p+2 \dots p+q$  et l'on

conclut, à l'aide de la formule L.R.S. (A14) que

$$\# \{ w.w' : w \in W_q, \overline{(w.w')R} = H \}$$

est la multiplicité de  $H$  dans le produit  $(p-r+q) \times 1_{n-p-q} \times (1_{r-q})$

Q.E.D.

exemple : Prenons  $r=2$  ; on impose donc à  $w'$  la condition d'être hyperstandard, son redressé étant de diagramme  $1 \ 1 \ n-2$  ou  $1 \ n-1$ , c'est-à-dire

$$w' \in \{ (1 \ 2 \dots n-2) \underline{w'}(n \ n-1) \}.$$

La démonstration précédente consiste à décomposer l'ensemble des mots  $w$  en deux sous-ensemble dans le cas de  $r=2$  :

$$\begin{aligned} \{ ((n \dots p+2) \underline{w'}(1 \dots p)) \ p+1 \} &= \{ ((n \dots p+2) \underline{w'}(1 \dots p-1)) \ p \ p+1 \} \\ &\cup \{ ((n \dots p+3) \underline{w'}(1 \dots p)) \ p+2 \ p+3 \} \end{aligned}$$

ce qui induit la décomposition suivante de l'ensemble  $\{w.w'\}$  :

$$\{ (n \dots p+2) \underline{w'}(1 \dots p-1) \underline{w'}(p+1 \ p) \} \cup \{ (n \dots p+3) \underline{w'}(1 \dots p) \underline{w'}(p+1 \ p+2) \}$$

qu'il suffit d'interpréter alors à l'aide de la règle de Littlewood-Richardson-Schützenberger pour conclure.

Remarque - La démonstration précédente montre aussi que si un mot appartient à l'ensemble  $\{w.w'\}$ , alors tous les mots qui lui sont plaxiquement équivalents (A10) appartiennent à ce même ensemble. Comme de plus les mots  $w.w'$  sont distincts, l'ensemble  $w.w'$  est donc une union disjointe de classes d'équivalence, qu'il suffit de caractériser par leurs éléments distingués que sont les tableaux (A11). On a donc :

THEOREME bis - Sous les mêmes hypothèses que dans le théorème précédent, l'ensemble  $\{w.w'\}$  contient exactement  $(I, J, H)$  tableaux de forme  $H$ .

Exemple d'utilisation des deux théorèmes :

On étudie le cas de  $I = J = 1 \ 1 \ 3$ .

Les mots  $w$  hyperstandards dont le redressé a pour diagramme 113 sont

54123 , 51423 , 51243 , 15243 , 15423 , 12543

Ces mots sont à considérer comme des permutations dont il faut calculer tous les produits deux à deux :

|       | 54123        | 51423 | 51243        | 15243        | 15423        | 12543        |
|-------|--------------|-------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 54123 | 32541        | 35241 | 35421        | 53421        | 53241        | <u>54321</u> |
| 51423 | <u>32514</u> | 35214 | <u>35124</u> | <u>53124</u> | <u>53214</u> | 51324        |
| 52143 | 34512        | 35412 | 35142        | 53142        | <u>53412</u> | 51342        |
| 15243 | 34152        | 31452 | 31542        | 13542        | 13452        | 15342        |
| 15423 | 32154        | 31254 | 31524        | 13524        | 13254        | 15324        |
| 12543 | <u>34125</u> | 31425 | <u>31245</u> | 13245        | 13425        | <u>12345</u> |

Les tableaux sont soulignés, le décompte est :

|                                                 |                     |                                      |
|-------------------------------------------------|---------------------|--------------------------------------|
| H = 5, 1 tableau : 12345 , 1 mot                | (123,123,5) = 1     | } coefficients de<br>Clebbsch-Gordan |
| H = 14 , 1 tableau : 31245 , 4 mots             | (123,123,14) = 1    |                                      |
| H = 23 , 2 tableaux : 34125 et 35124 , 10 mots  | (123,123,23) = 2    |                                      |
| H = 113 , 1 tableau : 53124 , 6 mots            | (123,123,113) = 1   |                                      |
| H = 122 , 2 tableaux : 32514 et 53412 , 10 mots | (123,123,122) = 2   |                                      |
| H = 1112 , 1 tableau : 53214 , 4 mots           | (123,123,1112) = 1  |                                      |
| H = 11111 , 1 tableau : 54321 , 1 mot           | (123,123,11111) = 1 |                                      |

CAS GENERAL -

Considérons le cas où l'on n'impose plus à  $I$  et  $J$  d'être des équerres ; l'ensemble de mots décrit dans l'énoncé du théorème se décompose en sous-ensembles dont les cardinaux ne sont plus des multiples des  $\dim H$  respectifs. Par exemple, dans le cas où  $I = J = 123$  , les coefficients calculés sont donnés par le tableau suivant, la deuxième ligne étant celle des coefficients de Clebsch-Gordan :

|          |   |   |    |     |     |     |     |     |      |      |       |        |
|----------|---|---|----|-----|-----|-----|-----|-----|------|------|-------|--------|
| H        | = | 6 | 15 | 24  | 33  | 114 | 123 | 222 | 1113 | 1122 | 11112 | 111111 |
| obtenus  |   | 1 | 2  | 3,1 | 4,1 | 1,8 | 4,9 | 4   | 1,8  | 3,1  | 2     | 1      |
| attendus |   | 1 | 2  | 3   | 4   | 2   | 5   | 4   | 2    | 3    | 2     | 1      |

Nous n'avons pas encore réussi à déterminer le domaine de validité de la méthode, i.e. déterminer le domaine des partitions pour lesquelles l'entier le plus proche du coefficient obtenu est bien le coefficient de Clebsch-Gordan.

## ANNEXES

### Représentations du groupe symétrique en caractéristique zéro

Les représentations irréductibles de  $\mathfrak{S}_n$  sont en correspondance

A1 biunivoque avec les partitions  $I$  de poids  $n$  (i.e.  $I = (i_1, \dots, i_n)$ ,  $0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_n$ ,  $\sum i = n$ , noté  $|I| = n$ ).

A2 La trace de la matrice représentant un élément  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  dans la représentation d'indice  $I$  est notée  $\chi_I(\sigma)$ ;  $\chi_I : \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathbb{Z}$  est le caractère de la représentation.

Les partitions indexent aussi les représentations irréductibles positives du groupe linéaire  $GL(m)$  (l'entier  $m$  est indépendant de  $n$ ), et donc une partition  $I$  définit un foncteur

$S_I : \text{Modules localement libres} \rightsquigarrow \text{Mod. loc. libres}$   
dit foncteur de Schur d'indice  $I$ ; ainsi,  $S_{000}$  est la  $n$ -ième puissance symétrique, et  $S_{001\dots 1}$  la  $n$ -ième puissance extérieure.

A3 La valeur de  $S_I$  en un module libre, somme de modules de rang 1 :  $A, B, \dots$  est symétrique en  $A, B, \dots$ ; c'est la fonction de Schur d'indice  $I$  en ces variables.

Toute représentation (du groupe linéaire ou du groupe symétrique) se décompose en une somme directe de représentations irréductibles, et le nombre de facteurs isomorphes à la représentation irréductible d'indice  $I$  est dit multiplicité de  $I$  dans la représentation.

On conçoit à ce point que la correspondance entre représentations du groupe symétrique, du groupe linéaire, partitions et fonctions symétriques, permette de traduire toute opération de l'une de ces théories dans les autres.

Prenons par exemple le produit des caractères : si  $V_I$  est l'espace de la représentation irréductible de  $\mathfrak{S}_n$  (resp.  $V_J$ ), alors  $V_I \otimes V_J$  est  
A4 l'espace d'une représentation (produit de Kronecker) qui se décompose en une  
A5 somme directe : les multiplicités sont notées  $(I, J, H)$  et dites coefficients de Clebsch-Gordan. Le caractère de cette représentation est  $\chi = \chi_I \cdot \chi_J$ , c'est-à-dire  $\chi(\sigma) = \chi_I(\sigma) \cdot \chi_J(\sigma)$  : c'est le produit des caractères.

En ce qui concerne le groupe linéaire, ou les fonctions symétriques, cette opération est dite inner plethysm : c'est la décomposition des puissances symétriques d'un triple produit tensoriel de modules localement libres :

$$S_n(E \otimes F \otimes G) \simeq \bigoplus (I, J, H) S_I E \otimes S_J F \otimes S_H G.$$

Il est alors clair que le coefficient  $(I, J, H)$  est symétrique en les trois partitions.

Mais nous avons aussi besoin du produit extérieur des représentations des groupes symétriques. Le groupe  $\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_{n-p}$  peut être considéré comme sous-groupe de  $\mathfrak{S}_n$ . La représentation irréductible d'indice  $(I, J)$ , où  $I$  est une partition de poids  $p$ ,  $J$  une partition de poids  $n-p$ , de  
A6  $\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_{n-p}$  induit une représentation de  $\mathfrak{S}_n$  qui est dite produit extérieur et l'on en note les multiplicités  $(S_I \cdot S_J, S_H)$ .

Le produit extérieur n'est autre que le produit tensoriel des représentations pour  $Gl(m)$ , ainsi que le produit des fonctions symétriques:

$$S_I E \otimes S_J E \simeq \bigoplus (S_I \cdot S_J, S_H) S_H E$$

pour tout module localement libre  $E$ .



# Monoïdes libre & plaxique

Soit  $A$  un alphabet,  $A^*$  le monoïde libre qu'il engendre. Le produit de deux mots est noté par juxtaposition (concaténation) :

$w, w' \rightsquigarrow ww'$ . Plus généralement, étant donné deux mots  $w, w'$  de longueurs respectives  $n, n'$ , l'ensemble  $\{w \# w'\}$  des schuffles de  $w, w'$  est l'ensemble (avec répétition) des mots qui sont union de  $w$  et  $w'$  (en conservant l'ordre respectif des lettres de  $w$  et  $w'$ ). Ainsi

$$\{12 \# 34\} = \{1234, 1324, 1342, 3124, 3142, 1412\}$$

et

$$\{12 \# 2\} = \{122, 122, 212\}.$$

Dans ce qui suit, on suppose un ordre total sur l'alphabet :

$1 \leq 2 \leq 3 \dots$ . Un mot  $w = x_1 x_2 \dots$  est une ligne si  $x_1 \leq x_2 \dots$

Une ligne est supérieure à une autre  $w'$  si  $\text{longueur}(w) \leq \text{lg}(w')$

et  $x_1 > x'_1, x_2 > x'_2, \dots$

Tout mot admet une factorisation unique en un nombre minimal de lignes

$$w = x_1 x_2 | x_3 x_4 x_5 | x_6 \dots \quad (\text{on coupe le mot à chaque place où } x_i > x_{i+1}).$$

A8 Un mot  $t$  est un tableau si pour sa factorisation canonique en lignes :

$t = w_1 w_2 \dots$ , alors chaque ligne  $w_i$  est supérieure à la suivante  $w_{i+1}$ .

A9 La suite des longueurs des lignes d'un tableau est donc une partition qui est dite diagramme ou forme de  $t$  et notée  $\overline{t}$ .

On considère sur  $A^*$  les relations suivantes, dûes à Schensted

$\forall x \in A, \forall w$  ligne,  $wx \equiv yw'$ , où  $y$  est la première lettre (si elle existe) de  $w$  telle que  $y > x$ , et  $w'$  est la ligne obtenue de  $w$  en changeant  $y$  en  $x$ .

A10 Définition - Le monoïde plaxique est le quotient de  $A^*$  par les relations de Schensted.

(Knuth a montré qu'il suffisait de considérer les relations pour les lignes de longueur 2).

Il est peu commun de pouvoir à la fois donner une présentation d'un monoïde et de décrire ses éléments ; c'est l'avantage du monoïde plaxique :

A11 Théorème - Dans chaque classe d'équivalence plaxique de  $A^*$ , il existe un tableau et un seul.

L'opération mot  $\rightsquigarrow$  tableau équivalent est dit redressement et notée  $w \rightsquigarrow wR$  (la meilleure description de cette opération est le "jeu de taquin" de Schützenberger, cf (2)).

A12 Parmi les tableaux de même forme, on distingue le tableau hyperstandard : c'est celui obtenu par numérotation régulière des lignes comme suit  $\dots | 6 \dots 7 | 4 \dots 5 | 12 \dots 3$  ; un mot est dit hyperstandard si et seulement s'il est équivalent à un tableau hyperstandard.

Un mot est standard si aucune lettre n'est répétée.

A13 Exemple : les mots hyperstandards équivalents au tableau de diagramme équerre  $I = 1_{n-p}p$  sont les schuffles  $((n \dots p+1) \underline{w} (1 \dots p-1))p$ .

L'importance du monoïde plaxique tient essentiellement à ce que l'on peut remonter à l'algèbre de ce monoïde des opérations de l'algèbre des polynômes symétriques (ou des représentations des groupes symétrique et linéaire, ainsi qu'il a été vu ci-dessus). Le premier résultat en ce sens est la règle de Littlewood-Richardson (cf. 2), généralisée depuis :

A14 Règle de Littlewood-Richardson-Schützenberger

Soit  $A_1 U A_1 U \dots$  une segmentation de l'alphabet totalement ordonné  $A$ . Soit  $t_1$  un tableau dans  $A_1^*$  de forme  $I_1$ ,  $t_2$  dans  $A_2^*$  de forme  $I_2, \dots$  Soit  $H$  une partition de poids  $|I_1| + |I_2| + \dots$ . Alors :

le cardinal des mots  $w : wR = H$ ,  $w \in \{w_1 \underline{w}_2 \underline{w}_3 \dots\}_{w_1 = t_1, \dots}$

est égal à :

$$(S_{I_1} S_{I_2} \dots S_H) \dim H$$

où le premier coefficient est celui de la décomposition du produit extérieur (A6) et  $\dim H$  est la dimension de la représentation irréductible du groupe symétrique d'indice  $H$ .

#### REFERENCES

- (1) D.E. LITTLEWOOD - The Kronecker product of symmetric group representations  
J. Lond. M.S., 31 (1956) 89-93.
  
- (2) TABLE RONDE DE STRASBOURG 1976 - Combinatoire et représentation du  
groupe symétrique, D. FOATA éd., Springer Lect. Notes n°579, 1977.

Novembre 1978