

Calculs Multivariés

Alain Lascoux

4 décembre 2000

Une variable

Que faire avec un ordinateur ?

Tout utilisateur de système de calcul formel peut retrouver le
“[théorème binomial](#)” :

$\text{map}(\text{factor}, \text{taylor}(1/(1 - z * a)^k, z, 6));$

$1 + k a z + 1/2 k a^2 (k + 1) z^2 + 1/6 k a^3 (k + 2)(k + 1) z^3 + 1/24 k a^4 (k + 3)(k + 2)(k + 1) z^4 + 1/120 k a^5 (k + 4)(k + 3)(k + 2)(k + 1) z^5 + \dots$

Si besoin est, on peut pousser jusqu'à des ordres plus élevés quand la régularité est moins évidente :

```
taylor(convert([seq(1 - qi, i = 1..99)], ' * '), q, 100);
```

$$1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + q^{22} + q^{26} - q^{35} - q^{40} + q^{51} + q^{57} - q^{70} - q^{77} + q^{92} + \dots$$

et refaire ainsi beaucoup des calculs d'Euler. Il ne reste plus qu'à trouver les **LOIS**. Encore que ... **Zeilberger** et **Allègre** nous en dispensent (pour des raisons différentes).

Quid de plusieurs variables ?

“Théorème binomial” à plusieurs variables :

$map(factor, taylor(1/(1 - z * a)^k / (1 - z * b)^k / (1 - z * c)^k, z, 6));$

$1 + k(a + b + c)z + 1/2k(ka^2 + a^2 + kb^2 + b^2 + 2kba + kc^2 + c^2 + 2kca + 2kcb)z^2 +$
 $1/6k(2a^3 + 3ka^3 + k^2a^3 + 3k^2b^2a + k^2b^3 + 3kb^3 + 3kb^2a + 3k^2ba^2 + 3kba^2 + 2b^3 + k^2c^3 +$
 $3kc^3 + 3k^2c^2a + 3kc^2a + 3k^2c^2b + 3kc^2b + 3k^2ca^2 + 3kca^2 + 3k^2cb^2 + 3kcb^2 + 2c^3 +$
 $6k^2cba)z^3 + 1/24(k + 1)k(4k^2ca^3 + k^2a^4 + 6k^2c^2a^2 + 5ka^4 + 6a^4 + k^2b^4 + 4k^2b^3a +$
 $6k^2b^2a^2 + 4k^2ba^3 + 5kb^4 + 4k^2c^3a + 4k^2c^3b + 6k^2c^2b^2 + 4k^2cb^3 + k^2c^4 + 5kc^4 + 6b^4 +$
 $6c^4 + 8kca^3 + 6kc^2a^2 + 8kb^3a + 6kb^2a^2 + 8kba^3 + 8kc^3a + 8kc^3b + 6kc^2b^2 + 8kcb^3 +$
 $12k^2c^2ba + 12k^2cb^2a + 12k^2cba^2)z^4 + 1/120(k + 1)k(5k^3b^4a + 24a^5 + 10k^3b^3a^2 +$

$$\begin{aligned}
& 24b^5 + 30k^2c^2a^3 + k^3a^5 + 40k^2cba^3 + 40k^2cb^3a + 30k^2cb^2a^2 + 30kcb^4 + 40k^2c^3ba + \\
& 30k^2c^2b^2a + 30k^2c^2ba^2 + 20kc^2b^3 + 20kc^3a^2 + 30kca^4 + 20kc^3b^2 + 24c^5 + 30kc^4a + \\
& 30kc^4b + 20kb^2a^3 + 30kba^4 + 9k^2a^5 + 26ka^5 + 25k^2b^4a + 20kc^2a^3 + 30kb^4a + 20kb^3a^2 + \\
& 30k^2b^3a^2 + 10k^3b^2a^3 + 30k^2b^2a^3 + k^3b^5 + 9k^2b^5 + 26kb^5 + 5k^3ba^4 + 25k^2ba^4 + 5k^3c^4a + \\
& 25k^2c^4a + 5k^3c^4b + 25k^2c^4b + k^3c^5 + 9k^2c^5 + 26kc^5 + 10k^3c^3a^2 + 10k^3c^3b^2 + 30k^2c^3b^2 + \\
& 10k^3c^2a^3 + 10k^3c^2b^3 + 30k^2c^2b^3 + 30k^2c^3a^2 + 20k^3c^3ba + 30k^3c^2b^2a + 30k^3c^2ba^2 + \\
& 5k^3ca^4 + 25k^2ca^4 + 5k^3cb^4 + 25k^2cb^4 + 20k^3cb^3a + 30k^3cb^2a^2 + 20k^3cba^3)z^5
\end{aligned}$$

Pas tenu compte de la **Symétrie** !

Toute fonction symétrique de $\mathbb{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$ est une fonction des **fonctions élémentaires** $\Lambda^1, \dots, \Lambda^n$ définies par la fonction génératrice

$$\lambda_z(\mathbb{A}) = \sum z^i \Lambda^i = \prod_{a \in \mathbb{A}} (1 + za)$$

Une variable $x \leftrightarrow$ base linéaire $x^0, x^1, x^2, \dots$

n variables $\leftrightarrow$ base Λ^I , I partition de parts $\leq n$
($\Lambda^{11244} = \Lambda^1 \Lambda^1 \Lambda^2 \Lambda^4 \Lambda^4$).

Le calcul algébrique est maintenant pris en compte par une combinatoire des **partitions** (= vecteurs croissants d'entiers), ou des objets planaires associés : **Diagrammes, Tableaux de Young**.

Prenons par exemple un objet classique depuis le 18ème siècle, le **résultant** $\prod_{a \in \mathbb{A}, b \in \mathbb{B}} (a - b)$ de deux polynômes $\prod(x - a)$ et $\prod(x - b)$ (ici, de degrés 4 et 3) :

`pol1 := x^4 + convert([seq((-x)^{4-i} *  $\Lambda_i$ , i = 1..4)], ' + '):`

`pol2 := x^3 + convert([seq(-(-x)^{3-i} *  $f_i$ , i = 1..3)], ' + '):`

$$\begin{aligned}
& 2f2\Lambda_2\Lambda_4^2 + 4f2f1^2\Lambda_4^2 + 3f3^3\Lambda_3 - 3f3^3\Lambda_1\Lambda_2 - f3^3\Lambda_1f2 + 3f3\Lambda_1\Lambda_4^2 + \\
& 3f3^2\Lambda_3^2 + f3^3\Lambda_1^2f1 - f2^3f1\Lambda_1\Lambda_4 + f2^4\Lambda_4 + f2^2f3f1\Lambda_1\Lambda_3 - \\
& f2\Lambda_2f3^2\Lambda_1f1 + f2^2\Lambda_2f1^2\Lambda_4 - f2\Lambda_2f3^2\Lambda_1^2 - f2\Lambda_2^2f3\Lambda_3 - 2f2^2\Lambda_2f3\Lambda_3 - \\
& f2\Lambda_2f3f1^2\Lambda_3 + f2^2\Lambda_2f1\Lambda_1\Lambda_4 + 3f2f1\Lambda_1\Lambda_4^2 - 4f3f1f2\Lambda_2\Lambda_4 - \\
& f3^2f1\Lambda_3\Lambda_2 + 3f3^2f1f2\Lambda_3 - 4f3f1f2^2\Lambda_4 + f3\Lambda_3^3 - f3\Lambda_1f2^2\Lambda_4 + \\
& 5f3^2\Lambda_1\Lambda_4f1 + f3\Lambda_1f2\Lambda_2\Lambda_4 + \Lambda_4^3 + 3f3\Lambda_1f2f1^2\Lambda_4 - 3f3^2\Lambda_1\Lambda_3\Lambda_2 + \\
& f3^3\Lambda_1^3 + f3^2\Lambda_1f2\Lambda_3 - 2f3^2\Lambda_1f1^2\Lambda_3 + 2f2^2\Lambda_4^2 + 3f3\Lambda_1^2f2f1\Lambda_4 - \\
& 2f3^2\Lambda_1^2f1\Lambda_3 + 3f3^2\Lambda_1^2\Lambda_4 - \Lambda_4f3f1^2\Lambda_3 - \Lambda_4f3f1\Lambda_1\Lambda_3 + 2f2^3\Lambda_2\Lambda_4 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2f^3\Lambda_2 - f2\Lambda_2f3f1\Lambda_1\Lambda_3 + 2f3^2f1^2\Lambda_4 + 4\Lambda_4^2f3f1 - \\
& 3f2^2f1\Lambda_3\Lambda_4 - f2^3f3\Lambda_3 + 2f2\Lambda_1f3\Lambda_3^2 + f2^2\Lambda_1^2\Lambda_3f3 + 2f2\Lambda_2^2f3^2 + \\
& f2^2\Lambda_2f3^2 - 2f2^2\Lambda_1\Lambda_3\Lambda_4 - 3\Lambda_4f3\Lambda_3\Lambda_2 - 5\Lambda_4f3f2\Lambda_3 + f3^4 + \\
& f2^2\Lambda_2^2\Lambda_4 - 2f1^3\Lambda_2\Lambda_4f3 + f1\Lambda_2f3\Lambda_3^2 - 2f1\Lambda_2^2f3\Lambda_4 - f1^2\Lambda_1f2\Lambda_3\Lambda_4 - \\
& 2f1^2\Lambda_2\Lambda_4f3\Lambda_1 - 3\Lambda_4f3^2\Lambda_2 + f1\Lambda_2^2f3^2\Lambda_1 - 4\Lambda_4f3^2f2 - f1\Lambda_2f2\Lambda_3\Lambda_4 + \\
& 3f2f1f3\Lambda_3^2 + f3^2\Lambda_2^3 - f1^3f2\Lambda_3\Lambda_4 + f1^2\Lambda_1f3\Lambda_3^2 - f2^3\Lambda_1^2\Lambda_4 + f1^4\Lambda_4^2 + \\
& \Lambda_3f1\Lambda_4^2 + f1^3f3\Lambda_3^2 + f1^3\Lambda_1\Lambda_4^2 + f1^2\Lambda_2\Lambda_4^2 + f1^2\Lambda_2^2f3^2 - f2\Lambda_3^2\Lambda_4
\end{aligned}$$

Tenu compte de la symétrie, mais ce n'est pas suffisant pour y voir clair !

Ici, il faut prendre une autre **base** de fonctions symétriques :

Ce sont les **fonctions de Schur** qu'il nous faut :

$map(Tos, subs(f1 = e1, f2 = e2, f3 = e3, Sf2Table(Tos("), s))) :$

$Table2Sf(subs(s = F, "), s);$

$$\begin{aligned}
& -F_{2,2,1}S_{3,3,1} + S_{3,3,3,3} + F_{4,1,1}S_{2,2,2} + F_2S_{3,3,2,2} + F_{1,1}S_{3,3,3,1} - \\
& F_{4,2,1}S_{2,2,1} - F_{4,4,3}S_1 + F_{3,1}S_{3,2,2,1} - F_{4,3,2}S_{2,1} - F_{3,1,1}S_{3,2,2} + \\
& F_{4,4,2}S_{1,1} + F_{4,2,2}S_{2,2} + F_{4,3,3}S_2 + F_4S_{2,2,2,2} + F_{4,3,1}S_{2,1,1} + \\
& F_{4,2}S_{2,2,1,1} - F_{4,3}S_{2,1,1,1} - F_{3,2,2}S_{3,2} - F_{4,1}S_{2,2,2,1} - F_{3,3,3}S_3 + \\
& F_{2,2,2}S_{3,3} - F_{3,3,1}S_{3,1,1} - F_{4,4,1}S_{1,1,1} - F_{1,1,1}S_{3,3,3} - F_3S_{3,2,2,2} - \\
& F_1S_{3,3,3,2} + F_{4,4,4}S + F_{3,2,1}S_{3,2,1} + F_{2,1,1}S_{3,3,2} + F_{4,4}S_{1,1,1,1} - \\
& F_{2,1}S_{3,3,2,1} - F_{3,2}S_{3,2,1,1} + F_{2,2}S_{3,3,1,1} + F_{3,3,2}S_{3,1} + F_{3,3}S_{3,1,1,1}
\end{aligned}$$

Solution : Couples de partitions complémentaires

On aurait pu se douter de l'existence d'autres bases : dans la fonction génératrice $\sigma_z(\mathbb{A}) := 1 / \prod_{a \in \mathbb{A}} (1 - za) = \sum z^i S^i(\mathbb{A})$, prendre $z =$ matrice nulle, sauf 2^{eme} diagonale remplie de 1. Alors $\sigma_z(\mathbb{A})$ devient la **matrice de Toeplitz**

$$z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} S^0 & S^1 & S^2 & S^3 & S^4 & \dots \\ 0 & S^0 & S^1 & S^2 & S^3 & \dots \\ 0 & 0 & S^0 & S^1 & S^2 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

fonctions de Schur := tous les mineurs

$$S_{000} = \begin{bmatrix} S^0 & S^1 & S^2 \\ S^{-1} & S^0 & S^1 \\ S^{-2} & S^{-1} & S^0 \end{bmatrix}, \quad S_{\mathbf{257}} = \begin{bmatrix} S^{0+\mathbf{2}} & S^{1+\mathbf{5}} & S^{2+\mathbf{7}} \\ S^{-1+\mathbf{2}} & S^{0+\mathbf{5}} & S^{1+\mathbf{7}} \\ S^{-2+\mathbf{2}} & S^{-1+\mathbf{5}} & S^{0+\mathbf{7}} \end{bmatrix}$$

Les fonctions de Schur indicées par les partitions sont une base linéaire. On récupère le produit de deux fonctions de Schur en énumérant des tableaux.

Ainsi, dans le produit $S_{12} S_{12}$, on trouve 2 fois la fonction S_{123} parcequ'il y a deux tableaux

b			
2	a		
1	1	a	

a			
2	b		
1	1	a	

de forme $[1, 2, 3]$ respectant certaines contraintes.

Changements de base $\Leftrightarrow$ algèbre linéaire

Mais les fonctions symétriques ne sont pas nécessairement données dans une base élémentaire. Par exemple, le déterminant de Cauchy

$\left| \frac{1}{1-x_i y_j} \right|_{i,j \leq n}$ a des facteurs évidents

$$\frac{Vand(X) Vand(Y)}{\prod (1 - x_i y_j)} \times S(X, Y)$$

Trouver le facteur manquant bisymétrique $S(X, Y)$.

$$Cauchy(3) = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-x_1 y_1} & \frac{1}{1-x_1 y_2} & \frac{1}{1-x_1 y_3} \\ \frac{1}{1-x_2 y_1} & \frac{1}{1-x_2 y_2} & \frac{1}{1-x_2 y_3} \\ \frac{1}{1-x_3 y_1} & \frac{1}{1-x_3 y_2} & \frac{1}{1-x_3 y_3} \end{bmatrix}$$

$factor(numer(det("))));$

$$(x_3 - x_1)(x_2 - x_1)(-x_3 + x_2)(-y_3 + y_2)(y_1 - y_3)(y_1 - y_2)$$

Le numérateur se réduit aux deux Vandermondes, et donc

$$S(X, Y) = 1 .$$

Remplaçons les $1/(1 - x_i y_j)$ par des $1/(1 - x_i y_j)^2$.

```
Cauchy2(4) : factor( numer( det( " ) ) ) ;
```

```
Error, (in expand/bigprod) object too large
```

L'objet n'est trop gros que parceque l'on ne peut pas en extraire les facteurs que l'on connaît déjà !

Avant d'abandonner les fonctions symétriques, signalons qu'on peut les interpréter comme des **Opérateurs sur l'anneau des polynômes** : la fonction génératrice $\sum z^i \Lambda^i$ transforme tout polynôme comme suit

$$P = \sum c_u u \mapsto \prod_u (1 + zu)^{c_u} \quad (**)$$

(u =monôme, c_u = constante).

C'est la théorie des **λ -anneaux**, implémentée par **Vincent Prosper** dans la **librairie SFA** : la formule (**) contient toutes les formules de fonctions symétriques !!

Les alphabets doivent maintenant être considérés comme des polynômes de degré 1, à coefficients tous égaux à 1 :

$$\mathbb{A} \leftrightarrow a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

Exemple d'application : **Inversion de Lagrange**

$f(x) = x + ?x^2 + ?x^3 + \dots$. Trouver g telle que $g(f(x)) = x = f(g(x))$.

Solution : écrivant $f(x) = \frac{x}{\lambda_x(\mathbb{A})} = \frac{x}{1+x\Lambda^1(\mathbb{A})+x^2\Lambda^2(\mathbb{A})+\dots}$, on obtient le coefficient de x^{k+n} dans toute puissance g^k (k complexe) sous la forme

$$\frac{k}{k+n} \Lambda^n((k+n)\mathbb{A}) .$$

Décodage : Λ^n veut dire coefficient de x^n dans une série génératrice ; $(k+n)\mathbb{A} \Rightarrow$ prendre la $(k+n)$ -ième puissance de la série $\lambda_x(\mathbb{A})$.

Equivalent aux méthodes usuelles pour obtenir les coefficients en prenant des dérivées de puissances de $f(x)$. Mais la formule condensée donne **un développement** pour **chaque base** de fonctions symétriques.

Voci 5 développements en résultant directement :

$$\begin{aligned}
\Lambda^i((i+k)\mathbb{A}) &= (-1)^i \sum_{|J|=i} \Psi_J(-(i+k)) S^J(\mathbb{A}) \\
&= \sum_{|J|=i} \Psi_J(i+k) \Lambda^J(\mathbb{A}) \\
&= \sum_{|J|=i} S_J(i+k) S_{J^*}(\mathbb{A}) \\
&= \sum_{|J|=i} \Lambda^J(i+k) \Psi_J(\mathbb{A}) \\
&= (-1)^i \sum_{|J|=i} \frac{(-i-k)^{\ell(J)}}{m_1! m_2! \dots} \left(\frac{\Psi_1}{1}\right)^{m_1} \left(\frac{\Psi_2}{2}\right)^{m_2} \left(\frac{\Psi_3}{3}\right)^{m_3} \dots
\end{aligned}$$

qui expriment les coefficients cherchés dans différentes bases de fonctions symétriques de $\mathbb{A}$, les coefficients étant des spécialisations de fonctions symétriques en $1, 1, \dots, 1$.

Pas de Symétrie

Faire appel à **Newton**, qui a introduit une version **discrète** du calcul différentiel, les **différences divisées** ∂_{xy} :

$$f(x) \mapsto f^{\partial} := \frac{f(x) - f(y)}{x - y} ,$$

$$f(x, y) \mapsto f^{\partial} := \frac{f(x, y) - f(y, x)}{x - y} ,$$

et donné, comme application, une formule d'interpolation des fonctions de 1 variable (en des points $y_1, y_2, \dots$) :

$$\begin{aligned} f(x) = f(y_1) &+ f^{\partial}(x - y_1) + f^{\partial\partial}(x - y_1)(x - y_2) \\ &+ f^{\partial\partial\partial}(x - y_1)(x - y_2)(x - y_3) + \dots \end{aligned}$$

où les $f^{\partial \cdots \partial}$ sont obtenus par itération des $\partial_{y_i y_{i+1}}$.

La **formule de Newton** est donc l'analogue discret de la **formule de Taylor** en une variable, et décompose tout polynôme dans la base des $(x - y_1)(x - y_2) \cdots$

? Analogue discret de Taylor multivariée ?

i.e. quels sont les coefficients des images de $f(y_1, y_2, y_3, \dots)$ par tous les produits (différents) de différences divisées successives ?

Dans le cas d'une variable, les propriétés d'annulation des $(x - y_1)(x - y_2) \cdots$ permettent de reconstruire la formule de Newton.

Question annexe : comment utiliser des annulations dans le cas multivarié ?

Réponse : **Schubert**

Définition récursive des **Polynômes de Schubert** $Y[J]$, $J \in \mathbb{N}^n$:

$$\begin{cases} Y[\nu] = \prod_{(i,j) \in \text{Diagr}(\nu)} (x_i - y_j) \text{ si } \nu \text{ est décroissant} \\ Y[\nu] \partial_i = Y[\dots, \nu_{i+1}, \nu_i - 1, \dots] \text{ si } \nu_i > \nu_{i+1} \end{cases}$$

Par exemple, $Y[3, 2, 0] = \begin{pmatrix} (x_2 - y_1) & (x_2 - y_2) \\ (x_1 - y_1) & (x_1 - y_2) & (x_1 - y_3) \end{pmatrix}$

Par ∂_1 , on obtient $Y[2, 2, 0] = \begin{pmatrix} (x_2 - y_1) & (x_2 - y_2) \\ (x_1 - y_1) & (x_1 - y_2) \end{pmatrix}$. L'image par ∂_2

est $Y[2, 0, 1] = (x_2 + x_3 - y_1 - y_2)(x_1 - y_1)(x_1 - y_2)$, etc.

Propriétés d'annulation : $Y[K](\mathbb{A}, \mathbb{A}) = 0$ SAUF $Y[000] = 1$.

Permettent d'interpoler toute fonction :

$$f(\mathbb{X}) = \sum_K (f \partial^K)(\mathbb{B}) \cdot Y[K](\mathbb{X}, \mathbb{B}) , (\star\star)$$

somme sur tous les vecteurs dans $\mathbb{N}^\infty$.

Preuve := tester la formule sur chaque fonction $Y[J](\mathbb{X}, \mathbb{B})$ (en tant que fonction de $\mathbb{X}$). Les images par différences divisées de $Y[J]$ sont d'autres polynômes de Schubert, ou 0. Ils s'annulent tous par spécialisation $\mathbb{X} = \mathbb{B}$, sauf un seul, et l'on obtient l'égalité incontestable $Y[J](\mathbb{X}, \mathbb{B}) = Y[0..0] Y[J](\mathbb{X}, \mathbb{B})$.

Comme les polynômes de Schubert sont une base linéaire des polynômes (terme dominant de $Y[K] = \text{monôme } \mathbf{x}^K$), $(\star\star)$ est vraie pour tout polynôme !!

Dans le cas d'une variable, beaucoup de “dérivées” sont nulles. Ne restent que

$$\sum_i (f \partial_1 \partial_2 \cdots \partial_i) \cdot Y[i \ 0 \ \dots \ 0]$$

qui est bien la [formule de Newton](#), puisque

$$Y[i \ 0 \ \dots \ 0] = (x_1 - y_1) \cdots (x_1 - y_i).$$

$$\text{ToYY}(\text{NewtonInterp}(x_1^4, 3), \text{collect}) ;$$

$$y_1^4 \mathbf{Y}_0 + (y_1^3 + y_2 y_1^2 + y_2^2 y_1 + y_2^3) \mathbf{Y}_{1,0} + (y_2^2 + y_2 y_1 + y_2 y_3 + y_1^2 + y_3 y_1 + y_3^2) \mathbf{Y}_{2,0,0} + y_1^4 \mathbf{Y}_0$$

$$\text{ToYY}(\text{NewtonInterp}(x_2^4, 3), \text{collect}) ;$$

$$(-y_1^3 - y_2 y_1^2 - y_2^2 y_1 - y_2^3) \mathbf{Y}_{1,0} + (-y_2^2 - y_2 y_1 - y_2 y_3 - y_1^2 - y_3 y_1 - y_3^2) \mathbf{Y}_{2,0,0} + (y_2^3 + y_3 y_2^2 + y_3^2 y_2 + y_3^3) \mathbf{Y}_{0,1,0} + y_2^4 \mathbf{Y}_0 + (-y_2^2 - y_2 y_1 - y_2 y_3 - y_1^2 - y_3 y_1 - y_3^2) \mathbf{Y}_{1,1,0}$$

Les fonctions symétriques n'ont pas été perdues : $K =$ suite croissante
 $\Rightarrow Y[K](\mathbb{X}, 0) =$ fonction de Schur d'indice K .

`SpSpecialise(Tox(YY[0,1,3]), 'y', proc(i) 0 end) ;`

$$x_2^3 x_1 + x_2^3 x_3 + 2x_2^2 x_1 x_3 + x_2^2 x_3^2 + x_1^2 x_2^2 + 2x_2 x_1 x_3^2 + x_2 x_3^3 + 2x_2 x_3 x_1^2 + x_2 x_1^3 + x_3^2 x_1^2 + x_1^3 x_3 + x_3^3 x_1$$

$Tos_n(x2m_n("")) ;$

$$s[3, 1]$$

Voici tous les polynômes de Schubert correspondant au groupe symétrique sur 4 lettres

$$[3210] : -(-x_3 + y_1)(x_2 - y_2)(-x_2 + y_1)(-x_1 + y_3)(-x_1 + y_2)(-x_1 + y_1)$$

$$[3200] : (x_2 - y_2)(-x_2 + y_1)(-x_1 + y_3)(-x_1 + y_2)(-x_1 + y_1)$$

$$[3110] : -(-x_3 + y_1)(-x_2 + y_1)(-x_1 + y_3)(-x_1 + y_2)(-x_1 + y_1)$$

$$[3100] : (-x_2 + y_1)(-x_1 + y_3)(-x_1 + y_2)(-x_1 + y_1)$$

$$[3010] : (-x_1 + y_3)(-x_1 + y_2)(-x_1 + y_1)(y_1 + y_2 - x_3 - x_2)$$

$$[3000] : -(-x_1 + y_3)(-x_1 + y_2)(-x_1 + y_1)$$

$$[2210] : (-x_3 + y_1)(x_2 - y_2)(-x_2 + y_1)(-x_1 + y_2)(-x_1 + y_1)$$

$$[2200] : -(x_2 - y_2)(-x_2 + y_1)(-x_1 + y_2)(-x_1 + y_1)$$

$$[2110] : (-x_3 + y_1)(-x_2 + y_1)(-x_1 + y_2)(-x_1 + y_1)$$

$$[2100] : -(-x_2 + y_1)(-x_1 + y_2)(-x_1 + y_1)$$

$$[2010] : -(-x_1 + y_2)(-x_1 + y_1)(y_1 + y_2 - x_3 - x_2)$$

$$[2000] : (-x_1 + y_2)(-x_1 + y_1)$$

$$[1210] : -(-x_3 + y_1)(-x_1 + y_1)(-x_2 + y_1)(x_2 + x_1 - y_3 - y_2)$$

$$[1200] : (-x_1 + y_1)(-x_2 + y_1)(x_2 + x_1 - y_3 - y_2)$$

$$[1110] : -(-x_3 + y_1)(-x_2 + y_1)(-x_1 + y_1)$$

$$[1100] : (-x_1 + y_1)(-x_2 + y_1)$$

$$[1010] : (-x_1 + y_1)(y_1 + y_3 - x_3 - x_1 - x_2 + y_2)$$

$$[1000] : x_1 - y_1$$

$$[0210] : y_2^2 x_1 - y_2 x_1^2 + x_2^2 x_1 + x_2 y_1^2 - x_2^2 y_1 - y_3 y_1^2 + x_3 x_2^2 + x_3 x_1^2 - y_2 x_2^2 + y_2^2 x_2 - x_3 y_1 x_1 + x_3 x_2 x_1 - x_3 y_2 x_2 - x_3 y_3 x_1 + x_3 y_2 y_3 - x_3 y_3 x_2 - 2y_2 x_2 x_1 + x_3 y_3 y_1 + x_2 x_1^2 + 2y_2 x_2 y_1 + y_1^2 x_1 - y_1 x_1^2 + y_2 y_3 x_2 - 2x_2 y_1 x_1 + 2y_2 y_1 x_1 + y_3 y_1 x_1 + y_1 y_2 x_3 + y_1 x_2 y_3 + x_1 y_2 y_3 - y_3 y_2^2 - x_1 x_2 y_3 - y_1 y_2 y_3 - x_1 y_2 x_3 - y_1 x_2 x_3 - y_2 y_1^2 - y_2^2 y_1$$

$$[0200] : x_2^2 - y_2 x_2 + x_2 x_1 - x_2 y_1 - y_3 x_2 + y_2 y_3 - y_3 x_1 + y_3 y_1 + x_1^2 - y_1 x_1 - y_2 x_1 + y_2 y_1$$

$$[0110] : x_3 x_2 - x_3 y_2 + x_3 x_1 - x_3 y_1 - y_2 x_2 + y_2^2 - y_2 x_1 + y_2 y_1 + x_2 x_1 - x_2 y_1 - y_1 x_1 + y_1^2$$

$$[0100] : x_2 - y_2 + x_1 - y_1$$

$$[0010] : x_3 - y_3 + x_2 - y_2 + x_1 - y_1$$

Tout le **calcul de Schubert** a été implémenté par **Sébastien Veigneau**, et bien d'autres choses encore, avant qu'il ne s'envole !

- Plusieurs algèbres liées au groupe symétrique agissant sur les polynômes : **SGA, NCA, IDCA, HEKA, ...**
- Polynômes avec comme base linéaire Schubert : **SP**
- Polynômes en n variables, avec comme coefficients les fonctions symétriques, et base, les polynômes de Schubert correspondant au groupe symétrique S_n : **FM**
- Version non commutative : **TAB, FREE**

Une autre version non commutative des fonctions symétriques a été implémentée par **Chan Ung** : **NCSF**

“Implémenté” n'est pas complet : les thèses de tous ces jeunes gens comportent bien plus que des programmes !

Les différences divisées ne sont pas limitées aux polynômes, on peut les appliquer aux **fonctions rationnelles**.

$$\frac{1}{1-x_1} \xrightarrow{\partial_1} \frac{1}{(1-x_1)(1-x_2)} \xrightarrow{\partial_2} \frac{1}{(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)} \xrightarrow{\partial_3} \dots$$

Permet d'augmenter le nombre de pôles !

Flexibilité en déformant les différences divisées :

par exemple, **différences divisées isobares** :

$$\pi_i : f(\dots, x_i, x_{i+1}, \dots) \mapsto \frac{x_i f(x_i, x_{i+1}) - x_{i+1} f(x_{i+1}, x_i)}{x_i - x_{i+1}}$$

Les π_i satisfont aux relations de tresses $\pi_1 \pi_2 \pi_1 = \pi_2 \pi_1 \pi_2$, &c., mais aussi à $\pi_i^2 = \pi_i$. Ils représentent l'**algèbre de Hecke à $q = 0$** , algèbre dont l'IGM s'honore d'abriter les sectateurs en son sein.

Plus élémentairement, les différentes algèbres implémentées dans **ACE** fournissent des outils pour justifier et étendre le **calcul formel** du siècle dernier $a_i \mapsto a^i$, ainsi que le **calcul ombra**. Par exemple, toute fonction de Schur S_{λ} est obtenue comme image d'un monôme x^{λ} . Ainsi

$$\frac{1}{(1-x_1)(1-x_1x_2)(1-x_1x_2x_3)} \pi_1\pi_2\pi_1 = \sum_{\lambda} S_{\lambda}(x_1, x_2, x_3) ,$$

la somme de toutes les fonctions de Schur s'obtient à partir d'un produit de fonctions du type $1/(1-x)$.

Les outils sont là, mais pénurie de main d'oeuvre !