

20 ans de Schubert et Grothendieck

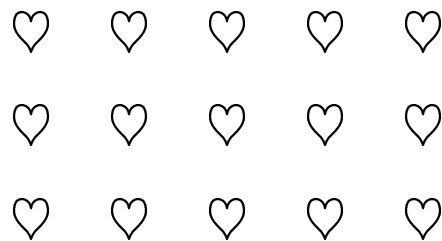
Alain Lascoux

1^{er} juillet 2003

[http ://phalanstere.univ-mlv.fr/~al](http://phalanstere.univ-mlv.fr/~al)

[http ://www.combinatorics.net/Lascoux](http://www.combinatorics.net/Lascoux)

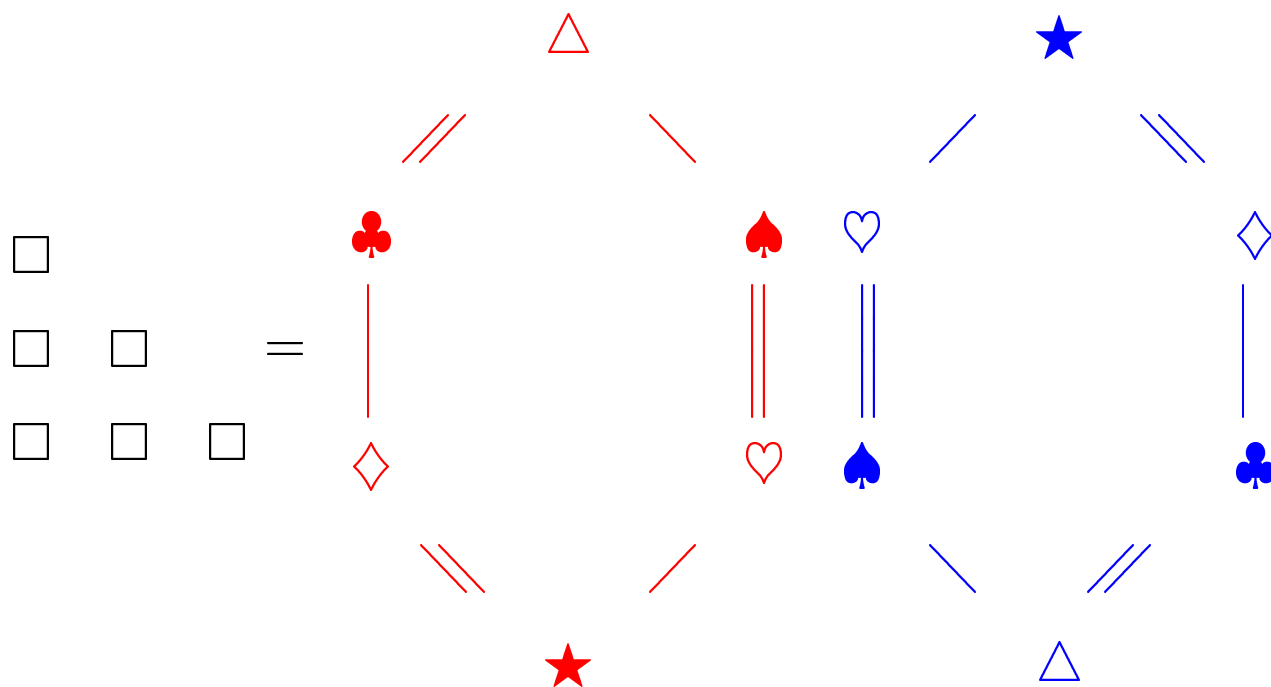
Qu'est-ce-que le **résultant** ?



Qu'est-ce-que la **théorie des fonctions symétriques** ?

$$\begin{array}{cc} \heartsuit & \heartsuit \\ \heartsuit & \heartsuit \\ \heartsuit & \heartsuit \end{array} = \begin{array}{cc} \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \end{array} + \begin{array}{ccc} \square & & \\ \square & \square & \blacksquare \\ \square & \square & \end{array} + \begin{array}{ccc} \square & & \\ \square & & \blacksquare \blacksquare \\ \square & \square & \end{array} + \begin{array}{ccc} \square & \square & \blacksquare \\ \square & \square & \blacksquare \\ \square & \square & \blacksquare \end{array} + \begin{array}{ccc} \square & & \\ \square & \blacksquare \blacksquare \blacksquare & \\ \square & & \end{array} \\
 + \begin{array}{ccc} \square & \blacksquare & \\ \square & \square & \blacksquare \blacksquare \end{array} + \begin{array}{ccc} & \blacksquare \blacksquare & \\ \square & \square & \blacksquare \blacksquare \end{array} + \begin{array}{ccc} \square & \blacksquare & \\ \square & \blacksquare & \blacksquare \blacksquare \end{array} + \begin{array}{ccc} & \blacksquare \blacksquare & \\ \square & \blacksquare \blacksquare \blacksquare & \end{array} + \begin{array}{ccc} \blacksquare \blacksquare \blacksquare & & \\ \blacksquare \blacksquare \blacksquare & & \\ \blacksquare \blacksquare \blacksquare & & \end{array}$$

Qu'est-ce-que la **théorie des polynômes de Schubert** ?



Qu'est-ce-que la **théorie des polynômes de Grothendieck** ?

```
ACE> ListASM(3);
```

```
          [0    0    1] [0    1    0] [0    0    1]
          [          ] [          ] [          ]
          [0    1    0], [0    0    1], [1    0    0],
          [          ] [          ] [          ]
          [1    0    0] [1    0    0] [0    1    0]
[0    1    0] [1    0    0] [0    1    0] [1    0    0]
[          ] [          ] [          ] [          ]
[1   -1    1], [0    0    1], [1    0    0], [0    1    0]
[          ] [          ] [          ] [          ]
[0    1    0] [0    1    0] [0    0    1] [0    0    1]
```

La première figure dit que, étant donnés deux alphabets finis $\mathbb{A}, \mathbb{B}$,
le **résultant** des deux polynômes $\prod_a (x - a)$ et $\prod_b (x - b)$,
qui est égal à $\prod_a \prod_b (a - b)$,
peut s'écrire comme une **fonction de Schur** d'indice une **partition rectangle**.

Dans le cas de polynômes de degrés 3 et 5,

$$\begin{array}{ccccc}
 \heartsuit & \heartsuit & \heartsuit & \heartsuit & \heartsuit \\
 \heartsuit & \heartsuit & \heartsuit & \heartsuit & \heartsuit \\
 \heartsuit & \heartsuit & \heartsuit & \heartsuit & \heartsuit
 \end{array} \leftrightarrow S_{555}(\mathbb{A} - \mathbb{B})$$

La décomposition de $S_{55}(\mathbb{A}-\mathbb{B})$ en terme de $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ se fait en terme de fonctions de Schur d'indice complémentaire.

Passant à des cardinaux infinis, on fait de

$$\prod (1-ab) \quad \text{ou} \quad \prod (1-ab)^{-1}$$

un **noyau de Cauchy** qui définit à la fois un produit scalaire sur, et une base distinguée de, l'espace des polynômes symétriques.

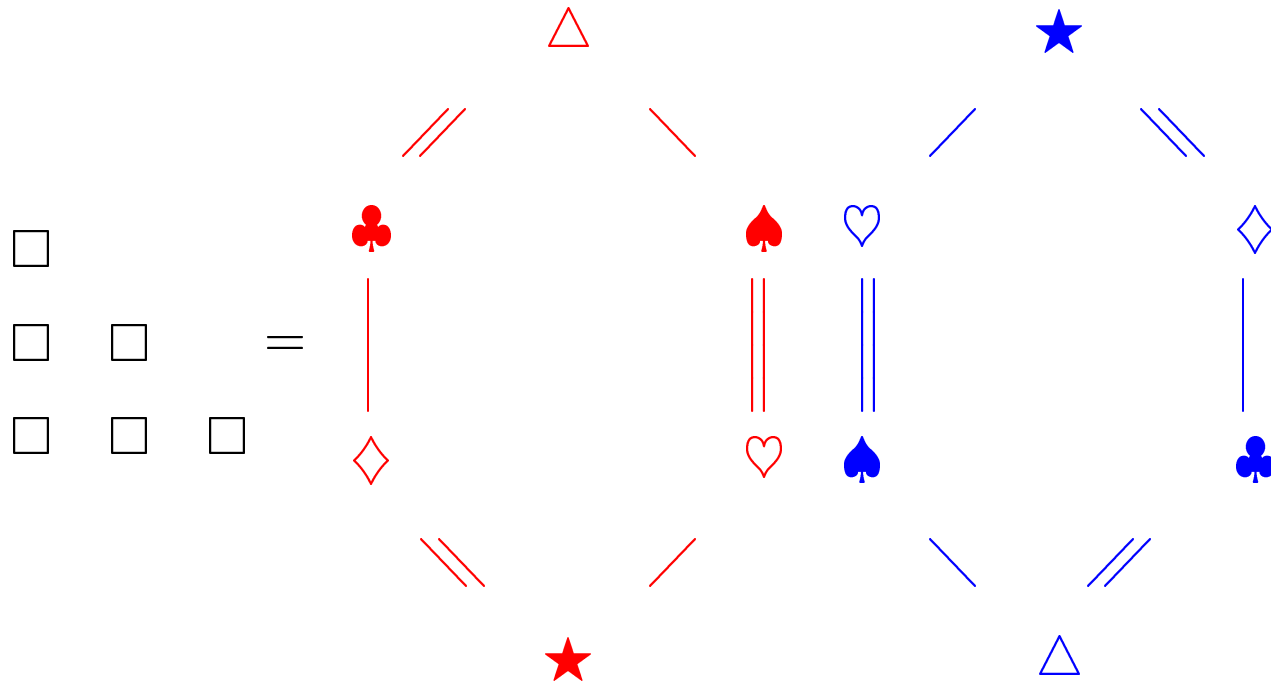
La méthode s'adapte au cas non symétrique. On fixe n .

Le **demi-noyau de Cauchy** $\prod_{i+j \leq n} (a_i - b_j)$ se décompose en une somme de polynômes de Schubert en $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$.

Les indices sont maintenant les permutations, et “indices complémentaires” signifie “couple de permutations retournées l'une de l'autre”

$$\begin{aligned} (a_1 - b_1)(a_1 - b_2)(a_2 - b_1) &= X_{321}(\mathbb{A}) X_{123}(\mathbb{B}) - X_{312}(\mathbb{A}) X_{213}(\mathbb{B}) \\ &\quad - X_{231}(\mathbb{A}) X_{132}(\mathbb{B}) + X_{132}(\mathbb{A}) X_{231}(\mathbb{B}) + X_{213}(\mathbb{A}) X_{312}(\mathbb{B}) \\ &\quad - X_{123}(\mathbb{A}) X_{321}(\mathbb{B}) \end{aligned}$$

C'est bien ce que dit la figure, avec les 6 permutations représentées par des symboles. Sur le permutoedre gauche, on lit des fonctions de $\mathbb{A}$, à droite, des fonctions de $\mathbb{B}$, en prenant le produit par superposition :



Le noyau de Cauchy définit un produit scalaire, en même temps que la base de Schubert. Mais la décomposition

$$\prod_{i+j \leq n} (a_i - b_j) = \sum_{J+I=\rho} b^J P_I(\mathbb{A}) ,$$

avec $\rho = [n-1, \dots, 1]$,

$$P_I(\mathbb{A}) = \Lambda^{i_1}(\mathbb{A}_{n-1}) \Lambda^{i_2}(\mathbb{A}_{n-2}) \Lambda^{i_3}(\mathbb{A}_{n-3}) \cdots$$

et $\mathbb{A}_j = \{a_1, \dots, a_j\}$ montre que les monômes ont pour base adjointe les produits de fonctions élémentaires sur des drapeaux d'alphabets décroissants.

Cela donne aussitôt un plongement de l'espace des polynômes dans l'algèbre libre (en tant qu'espace vectoriel!). Toute fonction élémentaire de degré k se relève en la somme de tous les monômes décroissants de degré k .

```
ACE> Pol2Free(x1*x2+x1*x3+x2*x3);
```

$$w[2, 1] + w[3, 1] + w[3, 2]$$

```
ACE> Pol2Free(x2^2);
```

$$-w[2, 1] + w[1, 2] + w[2, 2]$$

```
ACE> Pol2Free(Tox(X[1,4,3,2]));
```

$$w[2,1,1] + w[3,1,1] + w[2,1,2] + w[3,1,2] + w[3,2,2]$$

```
ACE> map(z->Tab2Mat(Word2Tab(z)), %);
```

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Les polynômes de Schubert libres sont des sommes de tableaux, mais

ce n'est pas évident d'après la définition précédente. Or le noyau de Cauchy symétrique a une extension non-commutative qui résulte de la construction de Schensted, revue par Knuth.

$$(\textcolor{blue}{b}_1 + \textcolor{red}{a}_3) \quad (\textcolor{blue}{b}_2 + \textcolor{red}{a}_3) \quad (\textcolor{blue}{b}_3 + \textcolor{red}{a}_3)$$

$(\textcolor{blue}{b}_1 + \textcolor{red}{a}_2) \quad (\textcolor{blue}{b}_2 + \textcolor{red}{a}_2) \quad (\textcolor{blue}{b}_3 + \textcolor{red}{a}_2)$ doit se développer comme une somme de

$$(\textcolor{blue}{b}_1 + \textcolor{red}{a}_1) \quad (\textcolor{blue}{b}_2 + \textcolor{red}{a}_1) \quad (\textcolor{blue}{b}_3 + \textcolor{red}{a}_1)$$

produits de mots en $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$, en lisant les mots en $\mathbb{A}$ par colonnes (de haut en bas), de gauche à droite, et les mots en $\mathbb{B}$, en transposant les

$$\textcolor{red}{a}_3 \quad \textcolor{blue}{b}_2 \quad \textcolor{red}{a}_3$$

axes. Par exemple, le terme $\textcolor{blue}{b}_1 \quad \textcolor{red}{a}_2 \quad \textcolor{blue}{b}_3$ s'interprète comme

$$\textcolor{red}{a}_1 \quad \textcolor{blue}{b}_2 \quad \textcolor{blue}{b}_3$$

$$\textcolor{red}{a}_3 \textcolor{red}{a}_1 \cdot \textcolor{red}{a}_2 \cdot \textcolor{red}{a}_3 \quad \textcolor{blue}{b}_3 \textcolor{blue}{b}_2 \cdot \textcolor{blue}{b}_3 \textcolor{blue}{b}_1 \cdot \textcolor{blue}{b}_2$$

Le noyau de Cauchy se développe, modulo les **relations plaxiques** qui transforment tout mot en un tableau, en une somme de paires de tableaux en $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ de formes complémentaires.

Rien à changer pour le demi-noyau, quoique ce soit un résultat

$$(b_1 + a_3)$$

nouveau. $(b_1 + a_2)$ $(b_2 + a_2)$ se développe en la somme des

$$(b_1 + a_1) \quad (b_2 + a_1) \quad (b_3 + a_1)$$

produits de polynômes de Schubert d'indice complémentaire, à condition de lire les mots par colonnes successives.

Ainsi, pour $n = 4$, le produit

$$X_{1342}(\textcolor{red}{\mathbb{A}})X_{2431}(\textcolor{blue}{\mathbb{B}})$$

apparaîtra comme

$$\left(\begin{array}{|c|} \hline \textcolor{red}{a}_3 \\ \hline \textcolor{red}{a}_2 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \textcolor{red}{a}_3 \\ \hline \textcolor{red}{a}_1 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \textcolor{red}{a}_2 \\ \hline \textcolor{red}{a}_1 \\ \hline \end{array} \right) \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \textcolor{blue}{b}_3 & \\ \hline \textcolor{blue}{b}_2 & \\ \hline \textcolor{blue}{b}_1 & \textcolor{blue}{b}_2 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \textcolor{blue}{b}_3 & \\ \hline \textcolor{blue}{b}_2 & \\ \hline \textcolor{blue}{b}_1 & \textcolor{blue}{b}_1 \\ \hline \end{array} \right) .$$

Les outils qui servent à engendrer les polynômes de Schubert et Grothendieck sont les **différences divisées**.

Il y en a trois familles principales, notant s_i la transposition de a_i, a_{i+1} :

$$\begin{aligned}\partial_i : f &\rightarrow \frac{f - f^{s_i}}{a_i - a_{i+1}} \\ \pi_i : f &\rightarrow \frac{a_i f - a_{i+1} f^{s_i}}{a_i - a_{i+1}} \\ \widehat{\pi}_i : f &\rightarrow \frac{(f - f^{s_i}) a_{i+1}}{a_i - a_{i+1}}\end{aligned}$$

Grâce à ces opérateurs, on peut définir récursivement les polynômes de Schubert, à partir d'un polynôme maximum (analogue au demi-noyau déjà utilisé) :

$$\begin{array}{ccc}
 & \boxed{(a_1 - b_1)(a_1 - b_2)(a_2 - b_1)} & \\
 \partial_1 \swarrow & & \searrow \partial_2 \\
 (a_1 - b_1)(a_2 - b_1) & & (a_1 - b_1)(a_1 - b_2) \\
 \partial_2 \downarrow & & \parallel \partial_1 \\
 (a_1 - b_1) & & a_1 + a_2 - b_1 - b_2 \\
 \partial_1 \searrow & & \nearrow \partial_2
 \end{array}$$

ainsi que les polynômes de Grothendieck :

$$\begin{array}{ccc}
 & \boxed{(1 - \frac{b_1}{a_1})(1 - \frac{b_2}{a_1})(1 - \frac{b_1}{a_2})} & \\
 \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\
 (1 - b_1/a_1)(1 - b_1/a_2) & & (1 - b_1/a_1)(1 - b_2/a_1) \\
 \pi_2 \downarrow & & \parallel \pi_1 \\
 (1 - b_1/a_1) & & 1 - b_1 b_2 / a_1 a_2 \\
 \pi_1 \searrow & & \swarrow \pi_2
 \end{array}$$

1

Pour voir le lien entre ces deux bases, on change de variables :

$x_i := 1 - a_i^{-1}$. Les différences divisées π_i deviennent $\pi_i \rightarrow (1 - x_{i+1}) \partial_i$ et le polynôme maximum (en un seul alphabet) est maintenant le même : $G_{4321} = X_{4321}$ (pour $n = 4$).

Le produit scalaire correspondant au noyau de Cauchy pour Schubert est ∂_{4321} , i.e. $(f, g) := fg \partial_{4321}$, et la base adjointe de Schubert est encore Schubert (en retournant l'alphabet $\mathbb{A}$).

Dans le cas Grothendieck, le produit scalaire est donné par

$$\pi_{4321} = (1 - x_2)(1 - x_3)^2(1 - x_4)^3 \partial_{4321}$$

La base adjointe s'obtient à partir d'un élément maximum en utilisant les $\hat{\pi}_i$. Mais si on prend le produit scalaire ∂_{4321} , alors la **base adjointe** est **encore Grothendieck** (pour l'alphabet $\{x_4, x_3, x_2, x_1\}$).

Ceci implique le théorème que les matrices de changement de base $X \rightarrow G$ et $G \rightarrow X$ soient **les mêmes**, mis a part signes et permutations de lignes et colonnes.

$$\begin{bmatrix} 1 & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & -1 & . \\ . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & 1 & . \\ . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . & 1 \end{bmatrix}$$

Les différences divisées ∂_i , π_i , $\hat{\pi}_i$ satisfont les relations de tresses, mais aussi

$$\partial_i^2 = 0, \quad \pi_i^2 = \pi_i, \quad \hat{\pi}_i^2 = -\hat{\pi}_i$$

Chacune de ces familles engendre donc une déformation de l'algèbre du groupe symétrique : l'algèbre NilCoxeter, ou l'algèbre de Hecke à $q = 0$ (en fait $\hat{\pi}_i = \pi_i - 1$).

On peut écrire un noyau mélangeant ces deux algèbres supposées commuter entre elles :

$$\begin{array}{ccc} (\pi_3 + \partial_3) & & \\ (\pi_2 + \partial_3) & (\pi_3 + \partial_2) & \\ (\pi_1 + \partial_3) & (\pi_2 + \partial_2) & (\pi_3 + \partial_1) \end{array}$$

Pour développer un tel noyau, il faut choisir soit π soit ∂ dans chaque facteur. On lit les mots en π par colonnes, de gauche à droite, et les mots en ∂ par **diagonales** (de haut en bas), de l'extérieur vers l'intérieur. Les mots maximaux sont

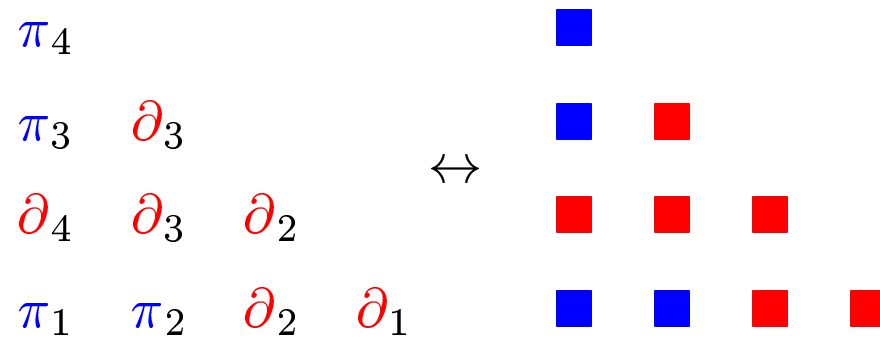
$$(\pi_3 \pi_2 \pi_1)(\pi_3 \pi_2)(\pi_3) \quad \& \quad (\partial_3 \partial_2 \partial_1)(\partial_3 \partial_2)(\partial_3).$$

Au total, on obtient une somme de paires d'éléments des deux algèbres :

$$\sum_t (\pi_{\sigma(t)}, \partial_{\nu(t)}) ,$$

somme sur tous les choix t .

Par exemple,



doit se lire

$$\left(\pi_4 \pi_3 \pi_1 \cdot \pi_2, \partial_3 \partial_2 \partial_1 \cdot \partial_3 \partial_2 \cdot \partial_4 \right)$$

Combinant un théorème de Lenart et la dualité Schubert/Grothendieck, on trouve

$$G_\sigma = \sum_{t \rightarrow \sigma, t \rightarrow \nu} \pm X_{\nu\omega}$$

$$X_\nu = \sum_{t \rightarrow \sigma, t \rightarrow \nu} G_{\nu\omega}$$

Par exemple, $X_{1342} = G_{1342} + 2G_{2341}$, puisque il y a trois triangles bicolores qui s'évaluent en $\partial_2 \partial_3 = \partial_{1342}$:

$$\begin{array}{c} \pi_3 \\ \partial_3 \quad \partial_2 \quad \rightarrow \pi_3 \pi_1 \pi_2 \pi_3 = \pi_{2431} \rightarrow G_{1342} , \\ \pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3 \end{array}$$

$$\pi_3$$

$$\pi_2 \quad \pi_3 \quad \rightarrow \pi_3 \pi_2 \pi_3 \pi_3 = \pi_{1432} \rightarrow G_{2341} ,$$

$$\partial_3 \quad \partial_2 \quad \pi_3$$

$$\pi_3$$

$$\pi_2 \quad \partial_2 \quad \rightarrow \pi_3 \pi_2 \pi_2 \pi_3 = \pi_{1432} \rightarrow G_{2341}$$

$$\partial_3 \quad \pi_2 \quad \pi_3$$

Si l'on enregistre (par les x_i) les numéros des diagonales où sont les ∂_j , on trouve les polynômes de Schubert :

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_3 & & \pi_3 \\
 \partial_3 & \partial_2 & \rightarrow x_1 x_2, \quad \pi_2 \quad \pi_3 & \rightarrow x_2 x_3, \\
 \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \partial_3 \quad \partial_2 \quad \pi_3 \\
 & & & \pi_3 \\
 & & & \pi_2 \quad \partial_2 & \rightarrow x_1 x_3 \\
 & & & \partial_3 \quad \pi_2 & \pi_3
 \end{array}$$

donne $X_{1342} = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3$.

Les différentes versions du noyau de Cauchy ont joué un rôle fondamental dans les propriétés énoncées.

La formule de Cauchy pour les polynômes de Schubert apparaît dans une note *Classes de Chern de la variété de drapeaux* que M.P. Schützenberger a refusé de cosigner pour favoriser ma carrière :

$$\text{Nombre de Citations} = 1/9 = 0.1111111111$$

(sur 9 articles, entre 1990 et 2000, où apparaît une formule de Cauchy pour les polynômes de Schubert ou Grothendieck.

Mais qu'en est-il des polynômes de Schubert eux-mêmes, puisqu'après tout, nous présentons ici un aperçu historique ?

*Schubert polynomials were introduced by Bernstein et al, and Demazure, and were **extensively developed** by Lascoux, Schützenberger, Macdonald and **others**... (formule répétée dans plusieurs articles).*

*The Schubert polynomial $\mathfrak{S}_w$ of (the permutation) w is a polynomial **defined in [Macdonald]**.*

*Les polynômes de Schubert ont d'abord été introduits par les géomètres (Dem,BGG) dans leurs études des variétés de drapeaux et des cellules de Schubert. Par la suite, Lascoux and Schützenberger ont développé **au cours des ans** une théorie très élégante de la combinatoire de ces polynômes.*

*The Schubert classes of polynomials were introduced by Bernstein-Gelfand-Gelfand and Demazure. Lascoux and Schützenberger **extracted** from those classes an explicit representative, the Schubert polynomials, and **studied** the properties of those polynomials **extensively**.*

*Schubert polynomials are of interest in algebraic geometry and in combinatorics. Their history goes back to the nineteen century, but the **modern** notion is due to Lascoux and Schützenberger who developed a beautiful theory of these polynomials.*

*Extending work of Demazure and of Bernstein, Gelfand and Gelfand, Lascoux and Schützenberger **defined remarkable** polynomial ...*

La présentation actuelle la plus courante est malheureusement nettement plus terne, consistant en l'expression figée :

The Schubert polynomials of Lascoux–Schützenberger.