

Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique

COMBINATOIRE. — Équerres et fonctions de Schur.

Note de **Alain Lascoux** et **Piotr Pragacz**, présentée par Marcel-Paul Schützenberger.

Remise le 29 octobre 1984.

Nous exprimons une fonction de Schur gauche comme un déterminant en les fonctions-équerres.

COMBINATORICS. — Hooks and Skew Schur Functions.

We express a skew Schur function as a determinant of hooks.

Dieudonné a maintes fois ([4], [5]) déploré le manque d'intérêt que portent à la théorie des déterminants certains mathématiciens et suggéré un renouveau s'appuyant sur la théorie des ensembles telle qu'on peut la trouver dans Bourbaki par exemple, et sur celle du groupe symétrique et du groupe linéaire qui n'y figure pas encore en totalité.

Ceci nous encourage à montrer que les relations de Bazin entre mineurs de matrice permettent de généraliser l'expression classique d'une fonction de Schur comme déterminant de fonctions « équerre »; l'intérêt de cette expression tient pour une part au rôle singulier que jouent les partitions équerre en théorie des fonctions de Schur [9], des représentations ou de la cohomologie des grassmanniennes [7], tout autant qu'en combinatoire ([2], [8]).

1. RELATIONS DE BAZIN. — Une suite A est une suite finie d'entiers positifs; la suite concaténée $\{a_1, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots\}$ de deux suites A, B est notée AB . Enfin, B étant une sous-suite de A , la suite complémentaire de B dans A est notée $A \setminus B$.

Étant donnée une matrice $n \times \infty$ et une suite A de cardinal n , on note $[A]$ le mineur maximal de la matrice pris sur les colonnes $a_1, \dots, a_n$. C'est à Bazin [1], en 1851, que l'on doit les premières relations entre mineurs maximaux d'une matrice. En spécialisant la matrice initiale, essentiellement en imposant qu'une partie de ses éléments soient 0 ou 1, on déduit des relations de Bazin la plupart des autres relations classiques dues à Sylvester, Cayley, ... (cf. les chapitres sur les « Compound determinants » dans Muir [11], et Rota [13] pour une version plus algébrique).

THÉORÈME DE BAZIN. — Soient une matrice $n \times \infty$, et trois suites A, B, C , $\text{card}(A) = \text{card}(C) = p$, $\text{card}(A) + \text{card}(B) = n$. Alors :

$$\det [ABc \setminus a]_{a \in A, c \in C} = [AB]^{p-1} [BC].$$

Par exemple, si $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5\}$, $C = \{6, 7, 8\}$, on a :

$$\begin{vmatrix} [23456] & [23457] & [23458] \\ [13456] & [13457] & [13458] \\ [12456] & [12457] & [12458] \end{vmatrix} = [12345]^2 [45678].$$

La théorie des invariants, comme nous l'a indiqué De Concini, fournit une démonstration aisée de ce théorème.

Un point de vue plus général repose sur le lemme de Schur concernant les endomorphismes d'un espace de représentation irréductible. Étant donné un espace vectoriel V , on note $S_I V$ la représentation irréductible (sur $\mathbb{C}$) de $GL(V)$ d'indice la partition I . Les relations de Bazin ne sont autres que l'égalité, à un scalaire près, des morphismes canoniques composés :

$$\Lambda^p V \otimes (\Lambda^{p-1} V)^{\otimes p} \rightarrow \Lambda^p V \otimes S_{(p-1)^p} V \rightarrow S_{p^p} V$$

et

$$\Lambda^p V \otimes (\Lambda^{p-1} V)^{\otimes p} \rightarrow \otimes^p V \otimes (\Lambda^{p-1} V)^{\otimes p} \rightarrow (\Lambda^p V)^{\otimes p} \rightarrow S_{p^p} V,$$

qui découle de l'irréductibilité de $S_{p^p} V$ et du lemme de Schur.

2. APPLICATION AUX FONCTIONS DE SCHUR. — Jusqu'aux travaux de Schur, la théorie des fonctions symétriques était essentiellement une branche de la théorie des déterminants (cf. [11]).

Dans l'anneau des polynômes symétriques Sym en une infinité de variables (cf. [10]), on considère les fonctions homogènes complètes S_i (somme des monômes de degré $i \geq 0$; $S_i = 0$ si $i < 0$), et la matrice infinie $\mathbb{S} = (S_{j-i})_{i,j \geq 1}$. Étant données deux suites finies $I = (i_1, i_2, \dots, i_p)$, $J = (j_1, \dots, j_p)$, la fonction de Schur gauche $S_{J/I}$ est le mineur de $\mathbb{S}$ pris sur les lignes $i_1 + 1, i_2 + 2, \dots, i_p + p$ et les colonnes $j_1 + 1, \dots, j_p + p$.

La fonction de Schur S_J est le cas spécial où $I = (0, \dots, 0)$.

De manière équivalente, les $S_{J/I}$ se présentent comme les composantes de vecteurs décomposables. Soit en effet E le module libre Sym^N de base $\{e_1, e_2, \dots\}$; soit K_j le vecteur $S_j e_1 + S_{j-1} e_2 + \dots + S_0 e_{j+1}$. Alors :

$$K_{j_1} \wedge K_{j_2+1} \wedge \dots \wedge K_{j_p+p-1} = \sum S_{J/I} e_{i_1+1} \wedge e_{i_2+2} \wedge \dots \wedge e_{i_p+p}.$$

Une interprétation géométrique des fonctions de Schur gauches comme polynômes universels des lieux de dégénérescence sera développée dans [12].

Parmi les fonctions de Schur, celles indexées par les partitions équerre $J = (0, \dots, 0, 1, \dots, 1, n+1)$ jouent un rôle particulier; on écrira $m \& n$ pour la partition $1^m n+1$ et $\Lambda_{m \& n}$ au lieu de $S_{m \& n}$. L'expression d'une fonction de Schur comme déterminant en les $S_{m \& n}$ est connue depuis Giambelli [7] qui interprète les $S_{m \& n}$ comme la condition pour un espace projectif variable de rencontrer un espace fixe et d'être contenu dans un autre; Foulkes [6] a généralisé ce déterminant au cas d'une fonction de Schur gauche $S_{J/I}$ lorsque I est une équerre. Les relations de Bazin permettent de donner le cas général.

On emploie pour une partition J la notation (croissante) de Frobenius ([9], p. 60 et [10], p. 3) : $J = (\beta_1 \dots \beta_p \& \alpha_1 \dots \alpha_p)$, où $0 \leq \beta_1 < \dots < \beta_p$ et $0 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_p$; cette écriture est équivalente à la décomposition du diagramme de la partition J en ses équerres diagonales successives $\beta_1 \& \alpha_1, \dots, \beta_p \& \alpha_p$.

THÉORÈME. — Soient $J = (\beta_1 \dots \beta_p \& \alpha_1 \dots \alpha_p)$ et $I = (\delta_1 \dots \delta_q \& \gamma_1 \dots \gamma_q)$ deux partitions. Alors $(-1)^q S_{J/I}$ est égale au déterminant :

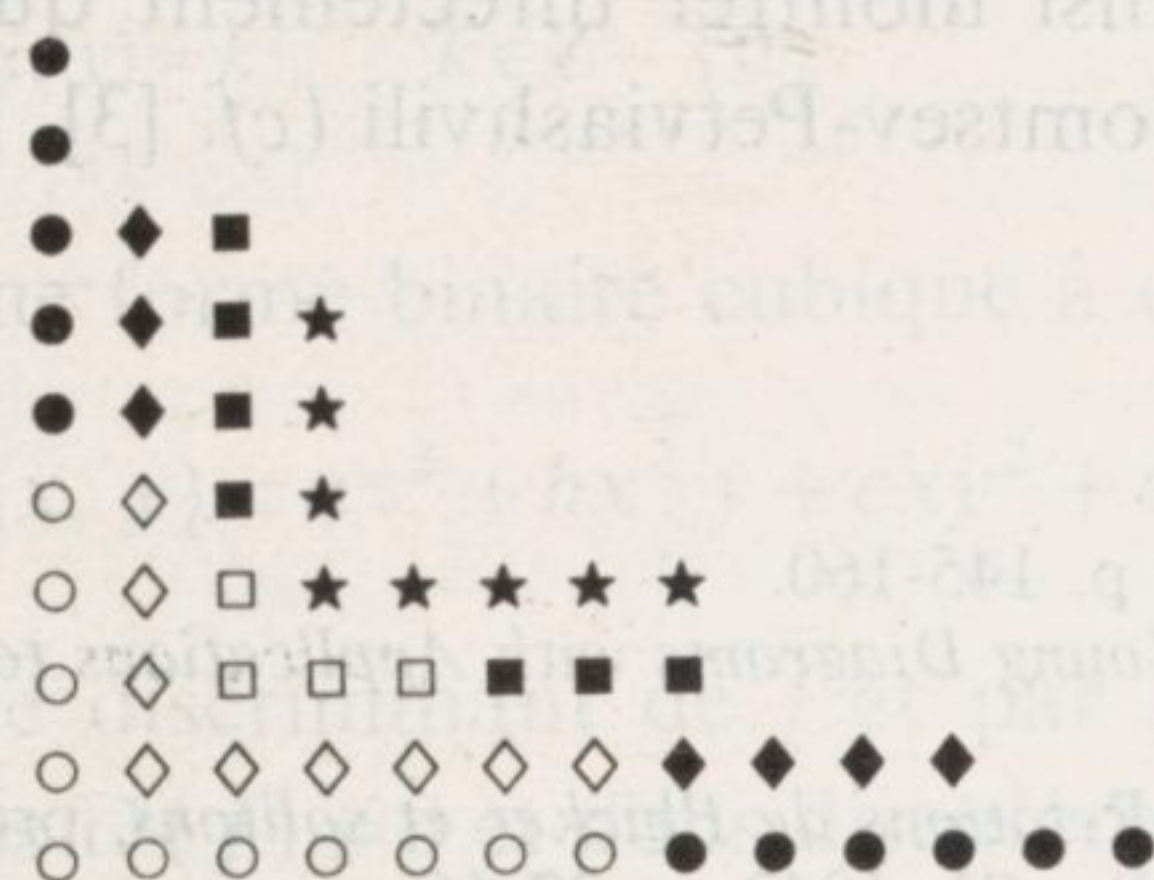
$$\begin{vmatrix} S_{\beta_1 \& \alpha_1} & S_{\beta_1 \& \alpha_2} & \dots & S_{\beta_1 \& \alpha_p} & \Lambda_{\beta_1 - \delta_1} & \dots & \Lambda_{\beta_1 - \delta_q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_{\beta_p \& \alpha_1} & S_{\beta_p \& \alpha_2} & \dots & S_{\beta_p \& \alpha_p} & \Lambda_{\beta_p - \delta_1} & \dots & \Lambda_{\beta_p - \delta_q} \\ S_{\alpha_1 - \gamma_1} & S_{\alpha_2 - \gamma_1} & \dots & S_{\alpha_p - \gamma_1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_{\alpha_1 - \gamma_q} & S_{\alpha_2 - \gamma_q} & \dots & S_{\alpha_p - \gamma_q} & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Démonstration. — On considère la matrice $|M|N|$, où M est la sous-matrice de $\mathbb{S}$ prise sur les lignes $1, 2, \dots, r, r+1+\gamma_1, \dots, r+1+\gamma_q$ et les colonnes $1, 2, \dots, r, r+1+\alpha_1, \dots, r+1+\alpha_p$, avec $r = \beta_p + 1$; N est une matrice $(r+q) \times (2q)$ de 0 et de 1, avec un seul 1 dans chaque colonne, placé successivement dans les lignes

$$\begin{aligned} A &= \{r - \beta_1, r - \beta_2, \dots, r - \beta_p, r + p + q + 1, \dots, r + p + 2q\}, \\ B &= \{1, 2, \dots, r\} \setminus \{r - \beta_p, \dots, r - \beta_1\}, \\ C &= \{r + 1, \dots, r + p + q\}, \end{aligned}$$

EXAMPLE. — Soient :

on peut représenter graphiquement le diagramme de J/I et sa décomposition en équerres comme suit (le diagramme de I est figuré par des symboles éclairés) :



S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{14}	S_{15}	S_{19}	S_{22}	.	.	.	.	.	.	.
.	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_{13}	S_{14}	S_{18}	S_{21}	.	.	.	.	.	.	.
.	.	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_{12}	S_{13}	S_{17}	S_{20}	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_{11}	S_{12}	S_{16}	S_{19}	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_{10}	S_{11}	S_{15}	S_{18}	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_9	S_{10}	S_{14}	S_{17}	.	.	1	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	S_0	S_1	S_2	S_3	S_8	S_9	S_{13}	S_{16}	.	1	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	S_0	S_1	S_2	S_7	S_8	S_{12}	S_{15}	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	S_0	S_1	S_6	S_7	S_{11}	S_{14}	1	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	S_0	S_5	S_6	S_{10}	S_{13}	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	S_2	S_3	S_7	S_{10}	.	.	.	1	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	S_0	S_4	S_7	.	.	.	.	1	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	S_3	S_6	.	.	.	.	.	.	1

$S_{3\&4}$	$S_{3\&5}$	$S_{3\&9}$	$S_{3\&12}$	Λ_2	Λ_0	.
$S_{5\&4}$	$S_{5\&5}$	$S_{5\&9}$	$S_{5\&12}$	Λ_4	Λ_2	Λ_1
$S_{6\&4}$	$S_{6\&5}$	$S_{6\&9}$	$S_{6\&12}$	Λ_5	Λ_3	Λ_2
$S_{9\&4}$	$S_{9\&5}$	$S_{9\&9}$	$S_{9\&12}$	Λ_8	Λ_6	Λ_5
S_2	S_3	S_7	S_{10}	.	.	.
.	S_0	S_4	S_7	.	.	.
.	.	S_3	S_6	.	.	.

$$\begin{array}{cc|cc}
 S_{1\&2} & S_{1\&4} & \Lambda_{1-2} & \Lambda_{1-0} \\
 S_{3\&2} & S_{3\&4} & \Lambda_{3-2} & \Lambda_{3-0} \\
 S_{2-2} & S_{4-2} & x_{11} & x_{12} \\
 S_{2-1} & S_{4-1} & x_{21} & x_{22}
 \end{array}
 = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} S_{1245} - x_{11} S_{1245/0002} - x_{12} S_{1245/0112} \\
 - x_{21} S_{1245/0003} - x_{22} S_{1245/0113} + S_{1245/0133}.$$

REMARQUE 2. — Les autres théorèmes classiques sur les déterminants composés donnent aussi des identités intéressantes relatives aux fonctions de Schur. Par exemple, la relation de Plücker $[12][34] - [13][24] + [14][23] = 0$ implique, pour toute partition J , la relation :

$$S_{J/0 \dots 0} \cdot S_{J/0 \dots 022} - S_{J/0 \dots 01} \cdot S_{J/0 \dots 012} + S_{J/0 \dots 02} \cdot S_{J/0 \dots 011} = 0.$$

Par cette méthode, on peut ainsi montrer directement que les fonctions de Schur sont solutions de l'équation de Kadomtsev-Petviashvili (cf. [3], [14]).

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] M. BAZIN, *J. Liouville*, 16, 1851, p. 145-160.
- [2] A. BERELE et A. REGEV, *Hook Young Diagrams with Applications to Combinatorics and to Representations of Lie Superalgebras.*, prépub.
- [3] C. DE CONCINI et A. LASCOUX, *Relations de Plücker et solitons*, prépub.
- [4] J. DIEUDONNÉ, *Bull. Soc. math. Fr.*, 71, 1943, p. 27-45.
- [5] J. DIEUDONNÉ, *Lin. Mult. Alg.*, 8, 1979, p. 1-14.
- [6] H. O. FOULKES, *Quart. Oxf.*, (2), 2, 1951, p. 67-73.
- [7] G. Z. GIAMBELLI, *Torino Atti*, 38, 1903, p. 823-844.
- [8] C. GREENE, A. NIJENHUIS et H. WILF, *Adv.*, 31, 1979, p. 104-109.
- [9] D. E. LITTLEWOOD, *The Theory of Group Characters*, Oxford, 1950.
- [10] I. G. MACDONALD, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Oxford Math. Mono., 1979.
- [11] T. MUIR, *History of Determinants*, 5 vol., Dover repr., 1960.
- [12] P. PRAGACZ, *Appendice au Formulaire raisonné de fonctions symétriques*, en préparation.
- [13] G. C. ROTA, *Studies Appl. Math.*, 53, 1974, p. 185-216.
- [14] M. SATO et Y. SATO, *Soliton Equations as Dynamical Systems on Infinite Dimensional Grassmann Manifolds*, prépub.

Laboratoire d'Informatique théorique et Programmation,
L.A. n° 248, Université Paris-VII, 2, place Jussieu, 75005 Paris;
Institut de Mathématiques, Université Copernic,
Chopina 12, 87-100 Torun, Pologne.