

Décompositions dans l'algèbre des différences divisées

Alain Lascoux et Marcel-Paul Schützenberger

L.I.T.P., Université Paris 7, 2 Place Jussieu 75251, Paris Cedex 05, France

Received 6 July 1989

Revised 26 June 1990

Abstract

Lascoux, A. et M.-P. Schützenberger, Décompositions dans l'algèbre des différences divisées, Discrete Mathematics 99 (1992) 165–179.

The group algebra of the symmetric group on the ring of rational functions has, apart from its canonical basis of permutations, several bases of *symmetrizing operators*, among which the classical Newton's *divided differences*. We deal here with the explicitation of the matrices of change of bases. Our main result is that, in the case of $Gl(n)$, the components of the matrices associated to the classical bases are just specializations of *Schubert* or *Grothendieck polynomials*. We refer to the work of Arabia, Bernstein–Gelfand–Gelfand, Kac, Kostant, Kumar, Rossmann for the interpretation of these matrices in terms of (equivariant) cohomology and K -theory rings of the flag manifold, or equivariant singularities of Schubert varieties. Our main technical tool is the simple observation that all but one specialization of the maximal twofold Schubert polynomial $\mathcal{R}$ vanish.

1. Introduction

L'algèbre du groupe symétrique $\mathcal{G}(A)$ d'un ensemble d'indéterminées A est étudiée depuis Frobenius et Young. De nouvelles propriétés apparaissent lorsque l'on prend le produit tensoriel *tordu* ([6, III.180, ex.11] dit *produit croisé*; [13, 19] emploient le terme *smash product*) avec le corps des fractions rationnelles $\mathcal{R}(A)$ de l'algèbre symétrique associée à A , les coefficients dans le corps des fonctions rationnelles en les variables sur lesquelles agit le groupe, au lieu de coefficients dans le corps des complexes. Cette algèbre, que nous notons $\mathcal{E}$ admet d'autres bases que la base canonique des permutations, en particulier les différences divisées de Newton; c'est pourquoi nous l'appelons 'Algèbre des différences divisées'.

Un point de vue alternatif consiste en la caractérisation des opérateurs sur l'anneau des polynômes, vérifiant les relations de Coxeter: on retrouve, après tensorisation par $\mathcal{R}(A)$, l'algèbre $\mathcal{E}$, cf. [23], cette fois-ci comme réalisation concrète de l'algèbre de Hecke du groupe symétrique.

La géométrie fournit différentes interprétations de l'algèbre $\mathcal{E}$ comme algèbre d'opérateurs sur l'anneau de cohomologie, de Grothendieck, la cohomologie équivariante ou la K -théorie équivariante de la variété de drapeaux. Suivant l'interprétation choisie, il faudra identifier $\alpha, e^\alpha, \dots$ au quotient de deux variables consécutives: $a_1/a_2, \dots$, et les opérateurs de $\mathcal{E}$ aux opérateurs naturels pour ces différentes théories cohomologiques. L'avantage présent de la combinatoire est que l'on mène simultanément les calculs dans les différentes théories, et même, que l'on obtient par exemple, des relations explicites entre les polynômes qui relèvent les cycles de Schubert et ceux qui relèvent les caractères de Demazure [25] quoique ces objets appartiennent de fait à des catégories différentes. Plus encore, on peut étendre les constructions à l'*algèbre libre* [24] et retrouver ainsi *tableaux de Young*, *bases standard*, etc. en liaison avec l'algèbre $\mathcal{E}$.

Un des problèmes intéressants de la théorie consiste en l'explicitation des différentes matrices de changement de base.

Nous montrons ici que les principales de ces matrices, considérées en particulier par [2–3, 13–14, 16, 27] sont données par les polynômes de Schubert et ceux de Grothendieck (Proposition 3.2, formules 3.8, 3.9, 4.6, 4.7, 4.11).

Rappelons que les polynômes de Schubert interviennent par ailleurs:

- comme base de l'anneau des polynômes en tant que module libre sur l'anneau des polynômes symétriques [19] (résultat implicite dans [5], décrit dans un autre contexte par [1, p. 42]).
- comme base de la cohomologie des variétés de drapeaux associées aux groupes linéaires [5, 7, 19].
- comme coefficients dans la formule d'interpolation de Newton à plusieurs variables [22].
- comme caractères irréductibles [15].
- comme généralisation des fonctions de Schur dans la troisième édition du livre de [26].

Attention: Les opérateurs agissent sur tout ce qu'ils trouvent sur leur gauche.

2. Différences divisées

Soient $A = \{a_1, \dots, a_{n+1}\}$ un ensemble totalement ordonné d'indéterminées (un *alphabet*) et $\mathcal{R}(A)$ l'anneau des fonctions rationnelles en A . On note $\mathfrak{S}(A)$ le groupe symétrique sur A , ω son élément maximal. Pour tout $f \in \mathcal{R}(A)$, f^μ est l'image de f par la permutation μ .

Soit $\mathcal{E}$ l'algèbre des opérateurs D sur $\mathcal{R}(A)$, du type $D = \sum_{\zeta \in \mathfrak{S}(A)} \zeta R_\zeta(D)$, où les coefficients $R_\zeta(D)$ appartiennent à $\mathcal{R}(A)$. L'anneau $\mathcal{R}(A)$ s'injecte canoniquement dans $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{R}(A) \ni f \rightarrow \text{'opérateur multiplication par } f\text{'}$$

Pour éviter les exposants trop volumineux, nous noterons aussi $f\mu \in \mathcal{R}(A)$ la fonction f^μ , ou dirons ‘la fonction $f\mu$ ’ ou ‘le polynôme $f\mu$ ’ lorsque nous voudrions distinguer ces derniers de l’opérateur composé de ‘multiplication par f ’ par ‘permutation μ ’.

L’algèbre $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{R}(A)$ -module à gauche, aussi bien qu’à droite, les deux structures s’échangeant par l’égalité

$$\text{Pour tout couple } (f, \mu): f \in \mathcal{R}(A), \mu \in \mathfrak{S}(A), \quad \mu f = f^{\mu^{-1}} \mu.$$

Le produit dans $\mathcal{E}$ est donné par

$$\sum_{\xi} \xi R_{\xi}(D) \cdot \sum_{\nu} \nu R_{\nu}(D') = \sum_{\xi, \nu} \xi \nu (R_{\xi}(D))' R_{\nu}(D') \quad (2.1)$$

On a dans $\mathcal{E}$ des opérateurs, indexés par les éléments de $\mathfrak{S}(A)$, remis à l’honneur par l’étude des variétés de drapeaux: les *différences divisées* ∂_{μ} dues à Newton, les *symétriseurs convexes* π_{μ} , les *symétriseurs concaves* ψ_{μ} .

La définition de ces opérateurs est, dans le cas où μ est la transposition simple σ_i échangeant a_i et a_{i+1} , en employant alors la notation $\partial_i, \pi_i, \psi_i$:

$$\begin{aligned} \partial_i &= \frac{1}{(a_i - a_{i+1})} (1 + \sigma_i), \\ \pi_i &= \frac{1}{(1 - a_{i+1}/a_i)} (1 + \sigma_i) = a_i \partial_i, \\ \psi_i &= (\sigma_i - 1) \frac{1}{(1 - a_i/a_{i+1})} = \partial_i a_{i+1} = \pi_i - 1. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Il faut compléter (2.2) par les valeurs en $\mu = \text{identité}$ qui sont respectivement $\partial_{\text{id}} = 1, \pi_{\text{id}} = 1, \psi_{\text{id}} = 0$.

Chaque famille d’opérateurs $\{\sigma_i\}, \{\partial_i\}, \{\pi_i\}, \{\psi_i\}$ vérifie séparément les relations de Moore/Coxeter (en écrivant $\{D_i\}$ pour l’une quelconque de ces familles):

$$D_i D_j = D_j D_i \text{ si } |i - j| \geq 2, \quad (2.3)$$

$$D_i D_{i+1} D_i = D_{i+1} D_i D_{i+1}. \quad (2.4)$$

Les relations (2.3) et (2.4) impliquent que les $\partial_{\mu}, \pi_{\mu}, \psi_{\mu}$ peuvent s’écrire comme le produit d’opérateurs *élémentaires* $\partial_i, \pi_i, \psi_i$ correspondant à une décomposition réduite arbitraire de μ (i.e., écriture de μ comme un produit de longueur minimale de transpositions simples).

On peut remarquer que

$$\begin{aligned} \partial_i \partial_i &= 0, \\ \pi_i \pi_i &= \pi_i, \\ \psi_i \psi_i &= -\psi_i. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Dans [23] (voir aussi [10]), on donne des opérateurs plus généraux satisfaisant, en plus des relations de Coxeter, la relation de Hecke

$$D_i D_i = q D_i + r. \quad (2.6)$$

Les opérateurs correspondant à la permutation maximale ω de $\mathfrak{S}(A)$, ont une expression globale, outre leurs différentes expressions comme produits d'opérateurs élémentaires [21]:

$$\partial_\omega = \frac{1}{\Delta} \sum_{\mu \in \mathfrak{S}(A)} \mu, \quad (2.7)$$

$$\pi_\omega = \frac{\rho}{\Delta} \sum_{\mu \in \mathfrak{S}(A)} \mu, \quad (2.8)$$

$$\psi_\omega = \frac{1}{\Delta} \sum_{\mu \in \mathfrak{S}(A)} \mu \rho^\omega, \quad (2.9)$$

où Δ le *Vandermonde*: $\Delta = \prod_{i < j} (a_i - a_j)$ et ρ le monôme $a_1^n a_2^{n-1} \cdots a_{n+1}^0$ (qui correspond à la demi-somme des racines positives), de sorte que $\rho^\omega = a_1^0 a_2^1 \cdots a_{n+1}^n$.

En d'autres termes, pour toute fonction $f \in \mathcal{R}(A)$, son image $f \partial_\omega$ par ∂_ω est la somme des transformées de f/Δ par toutes les permutations $\mu \in \mathfrak{S}(A)$, $f \psi_\omega$ s'obtient en multipliant $f \partial_\omega$ par ρ^ω tandis que $f \pi_\omega$ est la somme des transformées de $f \rho/\Delta$ par les $\mu \in \mathfrak{S}(A)$.

On simplifie beaucoup les calculs dans $\mathcal{E}$ en faisant agir les éléments de $\mathcal{E}$ sur un élément approprié de $\mathcal{R}(A)$ plutôt que d'utiliser les relations (2.3)–(2.5). Pour cela, on introduit un deuxième alphabet $Y = \{y_1, \dots, y_{n+1}\}$ de même cardinal que A , les éléments de Y étant supposés invariants par les éléments de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{R}(A)$ désignant dorénavant les fonctions rationnelles en A à coefficients les fonctions rationnelles en Y . Soit de plus θ la spécialisation $Y \rightarrow A$, i.e., $y_1 \rightarrow a_1, \dots, y_{n+1} \rightarrow a_{n+1}$.

Dans le cas des différences divisées, on part du polynôme

$$\mathcal{X} = \prod_{i+j \leq n+1} (a_i - y_j),$$

dont la faculté essentielle, qui montre que $\mathcal{X}$ est la 'polarisation' du Vandermonde, est la propriété d'annulation suivante (provenant directement de ce qu'un des facteurs au moins du polynôme $\mathcal{X}^\mu \theta$ s'annule, sauf lorsque $\mu = \omega$).

Lemma 2.10. *Les opérateurs $\mathcal{X} \mu \theta$ sont tous nuls, sauf $\mathcal{X} \omega \theta = \Delta \omega$.*

Le lemme permet de décomposer tout élément de $\mathcal{E}$ dans la base canonique $\{\xi\}$, ainsi que nous l'avons indiqué dans [23].

Corollaire 2.11. Soit $D = \sum \zeta R_\zeta(D)$ un élément de $\mathcal{E}$. Alors

$$R_\zeta(D) = \mathcal{X} \omega \zeta^{-1} D \theta / \Delta^\omega = \mathcal{X} \frac{1}{\Delta} \omega \zeta^{-1} D \theta \in \mathcal{R}(A).$$

Preuve. L'image par θ de la somme $\sum_v \mathcal{X} \omega \zeta^{-1} v R_v(D)$ se réduit à un seul terme d'après le Lemme 2.10. $\square$

En d'autres termes, le coefficient $R_\zeta(D)$ s'obtient comme image du polynôme $\mathcal{X}$ par la suite d'opérations: multiplication par $1/\Delta$, permutation par $\omega \zeta^{-1}$, application de D et spécialisation θ . On pourrait donner les formules similaires en échangeant structure droite et structure gauche de $\mathcal{E}$ en tant que $\mathcal{R}(A)$ -module libre.

Les coefficients $R_\zeta(D)$ sont compatibles avec la composition par les éléments de $\mathcal{E}$, ainsi que le montre le lemme suivant dont la preuve est la même que celle du Corollaire 2.11.

Lemme 2.12. Soient $P \in \mathcal{R}(A)$, $\eta \in \mathcal{G}(A)$. Alors, pour toute permutation ζ , pour tout élément D de $\mathcal{E}$, on a

$$R_\zeta(\eta PD) = P \eta^{-1} \zeta R_{\eta^{-1}\zeta}(D).$$

3. Polynômes de Schubert

Les images de $\mathcal{X}$ par les différences divisées ∂_μ sont par définition les *Polynômes de Schubert* (doubles). Plus précisément [17]:

Définition 3.1. Le polynôme de Schubert X_μ d'indice $\mu \in \mathcal{G}(A)$ est égal à $\mathcal{X} \partial_{\omega\mu}$.

L'indexation est choisie de sorte que $X_\omega = \mathcal{X}$; cet élément doit s'interpréter, en cohomologie, comme la classe de la diagonale pour le plongement diagonal de la variété de drapeaux. L'élément $X_{\omega\omega}$ est quant à lui égal à 1 ($\omega\omega =$ identité). La base des *cycles de Schubert* s'obtient par spécialisation des X_μ en $y_1 = \dots = y_{n+1} = 0$; comme les éléments de Y sont des scalaires pour les différences divisées, les cycles de Schubert sont donc les images par les différences divisées de la spécialisation de X_ω , i.e., du monôme ρ [21].

Par exemple, pour $A = \{a, b, c, d\}$ et $Y = \{x, y, z, \check{z}\}$ de cardinal 4, on a, en écrivant en indice ijk plutôt que $a_i a_j a_k$:

$$\mathcal{X} = X_{4321} = (a-x)(a-y)(a-z)(b-x)(b-y)(c-x).$$

$$X_{3421} = X/(a-z); \quad X_{4321} = X/(b-y); \quad X_{4312} = X/(c-x).$$

$$X_{2431} = (a-x)(b-x)(c-x)(a+b-y-z); \quad X_{3241} = X/(a-z)(b-y);$$

$$X_{3412} = X/(a-z)(c-x); \quad X_{4132} = (a-x)(a-y)(a-z)(b+c-x-y);$$

$$\begin{aligned}
X_{4213} &= X/(b-y)(c-x). \\
X_{2341} &= (a-x)(b-x)(c-x); \\
X_{1432} &= a^2b + a^2c + ab^2 + abc + b^2c - (a^2 + ab + b^2)(x+y) \\
&\quad - (ab + ac + bc)(x+y+z) + (a+b)(x^2 + xy + y^2) \\
&\quad + (a+b+c)(xy + xz + yz) - (x^2y + x^2z + xy^2 + xyz + y^2z); \\
X_{2413} &= (a-x)(b-x)(a+b-y-z); \\
X_{3142} &= (a-x)(a-y)(b+c-x-y); \\
X_{3214} &= (a-x)(a-y)(b-x); \quad X_{4123} = (a-x)(a-y)(a-z). \\
X_{1342} &= ab + ac + bc - (x+y)(a+b+c) + x^2 + xy + y^2; \\
X_{1423} &= a^2 + ab + b^2 - (a+b)(x+y+z) + xy + xz + yz; \\
X_{2143} &= (a-x)(a+b+c-x-y-z); \quad X_{2314} = (a-x)(b-x); \\
X_{3124} &= (a-x)(a-y). \\
X_{1243} &= a+b+c-x-y-z; \quad X_{1324} = a+b-x-y; \\
X_{2134} &= a-x. \\
X_{1234} &= 1.
\end{aligned}$$

Les polynômes de Schubert sont invariants par le plongement

$$\mathfrak{G}(\{a_1, \dots, a_n\}) \rightarrow \mathfrak{G}(\{a_1 \cdots a_{n+1}\})$$

(adjonction du point fixe a_{n+1}); ainsi, les polynômes pour $\mathfrak{G}(\{a, b, c\})$ correspondent-ils, dans la table précédente, aux permutations μ telles que $d\mu = d$.

Le Corollaire 2.11 donne la décomposition des différences divisées dans la base canonique $\{\zeta\}$ en fonction des polynômes $Xv\partial_\mu\theta$. Combinant avec Lemme 2.12, on obtient cette décomposition en fonction des spécialisations des polynômes de Schubert.

Proposition 3.2. *Pour tout couple de permutations μ, ζ , les coefficients $R_\zeta(\partial_\mu)$ sont égaux à $(X/\Delta)\omega\zeta^{-1}\partial_\mu\theta = X_{\omega\mu}\zeta^{-1}\omega\theta\zeta/\Delta^\zeta$, c'est-à-dire l'on a*

$$\partial_\mu = \sum_{\zeta} \zeta(X_{\omega\mu}\zeta^{-1}\omega\theta\omega\zeta/\Delta^\zeta).$$

Par exemple, le polynôme de Schubert $X_{1423} = X_{4321}\partial_3\partial_2\partial_1\partial_3 = a^2 + ab + b^2 - (a+b)(x+y+z) + xy + xz + yz$ a comme seules spécialisations non nulles tous les

$$X_{1423}v^{-1}\omega\theta\omega v = (a-c)(a-d) \quad \text{et} \quad X_{1423}\sigma_1v^{-1}\omega\theta\omega v\sigma_1 = (b-c)(b-d),$$

où v parcourt $\mathfrak{G}(a) \times \mathfrak{G}(\{b, c, d\})$, i.e., où v est telle que $av = a$. La Proposition 3.2 entraîne donc le développement

$$\partial_3\partial_2\partial_1\partial_3(1 - \sigma_2 - \sigma_3 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3\sigma_2)\left(\frac{(a-c)(a-d)}{\Delta} - \sigma_1\frac{(b-c)(b-d)}{\Delta}\right).$$

On prendra garde que les polynômes $X\omega\xi^{-1}\partial_\mu$ et $X_{\omega\mu}\xi^{-1}\omega$ sont différents, quoique leurs images par θ coïncident à permutation près d'après la Proposition 3.2.

Pour le groupe symétrique $\mathfrak{S}(a, b, c)$, la matrice de changement de base est:

$$\begin{aligned} 1\Delta &= (a-b)(a-c)(b-c), \\ \partial_1\Delta &= (1-\sigma_1)(a-c)(b-c), \\ \partial_2\Delta &= (1-\sigma_2)(a-b)(a-c), \\ \partial_1\partial_2\Delta &= (1-\sigma_1)(a-c) + (\sigma_1-1)\sigma_2(a-b), \\ \partial_2\partial_1\Delta &= (1-\sigma_2)(a-c) + (\sigma_2-1)\sigma_1(b-c), \\ \partial_1\partial_2\partial_1\Delta &= 1 - \sigma_1 - \sigma_2 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_1 - \sigma_1\sigma_2\sigma_1. \end{aligned}$$

Ces coefficients sont notés $c_{\mu,\xi}$ par [13, 16], et $q_{\mu}^{\xi^{-1}}$ par [3].

On voit aisément que le terme dominant de Proposition 3.2 est μ (le calcul par induction à partir de (3.10) donne aussi cette propriété). On a donc

$$\nu > \mu \Rightarrow R_\nu(\partial_\mu) = 0$$

(l'ordre sur les permutations est celui d'Ehresmann, dit aussi *de Bruhat*, dit aussi *strong order*). Comme l'application réciproque est aussi vrai, on a là, ainsi que le remarque le rapporteur, une caractérisation intéressante de l'ordre de Ehresmann/Bruhat (voir aussi [13–14, 27, 16]).

Il suit de (3.3) que l'on peut reformuler Lemme 2.10 en:

Lemme 3.4. *Les opérateurs $\mathcal{X}\partial_\mu\theta$, où les $\mu \in \mathfrak{S}(A)$, sont nuls, sauf $\mathcal{X}\partial_\omega\theta = \omega$.*

En particulier, considérant l'image de 1 par les opérateurs $\mathcal{X}\partial_\mu\theta$, on obtient:

Lemme 3.5. *Pour toute permutation μ , le polynôme $X_{\omega\mu}\theta$ est nul, sauf $X_{\omega\omega}\theta = X_{\omega\omega} = 1$.*

La relation (2.5) implique que $\partial_\mu\partial_\nu = \partial_{\mu\nu}$ ou 0 suivant que $l(\mu\nu) = l(\mu) + l(\nu)$ ou non. Du Lemme 3.4 s'ensuit donc le développement de tout élément de $\mathcal{E}$ dans la base $\{\partial_\mu\}$:

Lemme 3.6. *Soit $D = \sum_\xi Q_\xi(D)\partial_\xi$, avec $Q_\xi(D) \in \mathcal{R}(A)$, un élément de $\mathcal{E}$. Alors $Q_\xi(D) = \mathcal{X}D\partial_{\xi^{-1}\omega}\theta\omega$.*

Preuve. La somme $\mathcal{X}\sum_\nu Q_\nu(D)\partial_\nu\partial_{\xi^{-1}\omega}\theta\omega = \sum_\nu Q_\nu(D)\mathcal{X}\partial_\nu\partial_{\xi^{-1}\omega}\theta\omega$ se réduit au seul terme $Q_\xi(D)\omega\omega = Q_\xi(D)$ puisque tous les opérateurs $\mathcal{X}\partial_\mu\theta$ sont nuls, sauf $\mathcal{X}\partial_\omega\theta$. $\square$

Nous avons déjà en [23] attiré l'attention sur le fait que la matrice des coefficients $Q_\xi(\mu)$ est auto-inverse à symétrie et à multiplication par Δ près, ce

que l'on retrouve ici en comparant Proposition 3.2 et Lemme 3.6 (Kumar a aussi remarqué cette propriété).

$$\frac{1}{\Delta} Q_{\zeta}(\mu) = R_{\mu^{-1}\omega}(\partial_{\zeta^{-1}\omega})\omega. \quad (3.7)$$

Ainsi, du développement des ∂_{μ} donné plus haut déduit-on:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= (a-b)\partial_1 - 1, \\ \sigma_2 &= (b-c)\partial_2 - 1, \\ \sigma_1\sigma_2 &= (a-b)(a-c)\partial_1\partial_2 - (a-b)\partial_1 - (a-c)\partial_2 + 1, \\ \sigma_2\sigma_1 &= (a-c)(b-c)\partial_2\partial_1 - (a-c)\partial_1 - (b-c)\partial_2 + 1, \\ \sigma_1\sigma_2\sigma_1 &= \omega = \Delta\partial_{\omega} - (a-b)(a-c)\partial_1\partial_2 - (a-c)(b-c)\partial_2\partial_1 \\ &\quad + (a-c)(\partial_1 + \partial_2) - 1. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Les ∂_{μ} sont les opérateurs naturels en cohomologie de la variété de drapeaux (pour [5], la différence divisée ∂_{μ} est A_{μ} , pour [9], c'est D_{μ} et enfin, chez [13] on trouve x_{μ}). Voir aussi [11, 12] ainsi que les commentaires détaillés du rapporteur en fin de cet article.

On peut en fait relever les différences divisées en des opérateurs agissant sur la cohomologie T -équivariante de la variété de drapeaux [1, 2], la théorie pouvant même être faite dans le cas plus général d'une algèbre de Kac–Moody [3, 14]. Aux différences divisées, on préfère alors les opérateurs $\Delta\partial_{\mu}$. Le Lemme 2.12 donne le développement de ces derniers dans la base $\{\zeta\}$ à partir de celui des ∂_{μ} obtenu en Proposition 3.2:

$$R_{\zeta}(\Delta\partial_{\mu}) = R_{\zeta}(\partial_{\mu})\Delta^{\zeta} = X_{\omega\mu}\zeta^{-1}\omega\theta\omega\zeta. \quad (3.9)$$

Ces coefficients sont donc les spécialisations des polynômes de Schubert par le morphisme $y_i \rightarrow a_i\omega\zeta$. Les travaux de Berline–Vergne [4], Arabia [1, 2] et [14] ont très fortement suggéré que les $R_{\zeta}(\Delta\partial_{\mu})$ doivent pouvoir s'interpréter comme des invariants géométriques attachés aux points fixes des variétés de Schubert. Ce point de vue est développé par Rossmann [27] qui donne une définition des multiplicités équivariantes dans le contexte de la géométrie algébrique.

Indépendamment de toute géométrie, l'induction $\mu \rightarrow \mu\sigma_i$ permet d'obtenir les coefficients $R_{\zeta}(\Delta\partial_{\mu})$ à l'aide des sous-mots d'une décomposition réduite arbitraire de μ [19; 16, Lemma 4.4; 3, Proposition 3.3].

Le morphisme qui envoie la variété de Schubert d'indice μ sur l'opérateur $\Delta\partial_{\mu}$ est une injection de la cohomologie équivariante de la variété de drapeaux dans l'algèbre $\mathcal{E}$ [14]; dans le cas que nous considérons (le groupe linéaire), cette injection résulte des formules explicites que nous donnons ci-dessus.

Le développement (3.9) peut aussi s'obtenir à partir de la *Formule de Leibniz*

dans l'algèbre $\mathcal{E}$:

$$\begin{aligned} \forall f, \dots, g, h \in \mathcal{R}(A), f \cdots gh \partial_i &= f \cdots g(h^{\partial_i}) + f \cdots (g^{\partial_i})h\sigma_i b \\ &+ \cdots + (f^{\partial_i}) \cdots gh\sigma_i \\ &+ \partial_i f \cdots gh\sigma_i \end{aligned} \quad (3.10)$$

où $f, \dots, g, h$ dénotent des éléments de $\mathcal{R}(A)$, et du fait que les fonctions symétriques en a_i et a_{i+1} sont des scalaires pour ∂_i .

Par exemple, pour $\mathcal{G}(\{a, b, c\})$, on obtient successivement

$$\begin{aligned} (a-b)\partial_1 &= a\partial_1 - b\partial_1 + \partial_1(b-a) = 1 + \sigma, \\ (a-b)(a-c)(b-c)\partial_1 &= (1 + \sigma_1)(a-c)(b-c), \\ (a-b)(a-c)(b-c)\partial_1\partial_2 &= (1 + \sigma_1)(a-c)(1 + \sigma_2) \\ &+ (1 + \sigma_1)(a\partial_2 - c\partial_2)(c-b) + (1 + \sigma_1)\partial_2 \\ &= (1 + \sigma_1)(a-c) + (1 + \sigma_1)\sigma_2(a-b). \end{aligned}$$

Ce dernier calcul donne en fait l'expression de $\Delta\partial_\mu$ en fonction des sous-mots d'une décomposition réduite de μ , et coïncide avec l'algorithme de Arabia et Kostant–Kumar mentionné plus haut.

Les résultats de ce paragraphe peuvent aussi s'écrire à l'aide du produit scalaire: $\forall P, Q \in \mathcal{R}(A)$, $(P, Q) := PQ\partial_\omega$ pour lequel la base des polynômes de Schubert est auto-adjointe [19, 13].

4. Polynômes de Grothendieck

L'anneau de Grothendieck de la variété de drapeaux fait intervenir de manière naturelle les opérateurs π_μ et ψ_μ ([9] note Λ_μ^0 pour π_μ ; [7, 1] emploie l'opérateur conjugué de ψ_μ par ω , qu'il note L_μ). Le Corollaire 2.11 donne le développement de ces opérateurs dans la base canonique $\{\xi\}$:

$$R_\xi(\pi_\mu) = \mathcal{X}\pi_\mu\xi^{-1}\omega\theta\omega\xi/\Delta^\xi. \quad (4.1)$$

Il se trouve que ce sont d'autres polynômes que les $\mathcal{X}\pi_\mu$ qui interviennent en K -théorie [20, 18]:

Définition 4.2. Le polynôme de Grothendieck d'indice μ est

$$G_\mu = \prod_{i+j \leq n+1} (1 - y_i/a_j)\pi_{\omega\mu} = \frac{\mathcal{X}}{\rho}\pi_{\omega\mu}.$$

Les polynômes de Grothendieck sont des polynômes en les $\{1/a_i\}$ et $\{y_j\}$; en fait, $G_\omega = \prod_{i+j \leq n+1} (1 - y_i/a_j) = X/\rho$ et l'on peut éviter de recourir aux inverses en remarquant que les ρG_μ sont des polynômes en les $\{a_i\}$ et $\{y_j\}$.

Les polynômes de Grothendieck, tout comme les polynômes de Schubert, sont des généralisations des *fonctions de Schur*. Inversement, les *multifonctions de Schur* permettent de donner des expressions condensées de ces polynômes.

Définition 4.3. Soient A et Y deux alphabets finis. Les *fonctions symétriques complètes* $S_j(A - Y)$ sont les coefficients de la série génératrice

$$\frac{\prod_{y \in Y} (1 - \xi y)}{\prod_{a \in A} (1 - \xi a)} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \xi^j S_j(A - Y),$$

où ξ est une indéterminée supplémentaire.

Définition 4.4. Soient r un entier, $H = (h_1, \dots, h_r)$ un r -uplet d'entiers rationnels, $A^1, \dots, A^r, Y^1, \dots, Y^r$ des alphabets finis. Alors, la *(multi-)fonction de Schur* $S_H(A^1 - Y^1, \dots, A^r - Y^r)$ est la valeur du déterminant

$$|S_{h_j + j - i}(A^j - Y^j)|_{1 \leq i, j \leq r}$$

Dans le cas de $S(\{a_1, \dots, a_4\})$, notons en outre $(ijh \pm mnp)$ la fonction $(a_1 a_2 a_3)^{-3} S_{333}(A_i - Y_m, A_j - Y_n, A_h - Y_p)$, où, pour tout k , A_k est l'alphabet des k -premières lettres de A : $A_k = \{a_1, \dots, a_k\}$, mutatis mutandis pour Y . Alors

$$\begin{aligned} G_{4321} &= (321 \pm 123). \\ G_{3421} &= (321 \pm 122); \quad G_{4231} = (321 \pm 113); \quad G_{4312} = (321 \pm 023). \\ G_{2431} &= (322 \pm 113); \quad G_{3241} = (321 \pm 112); \quad G_{3412} = (321 \pm 022); \\ G_{4132} &= (331 \pm 023); \quad G_{4213} = (321 \pm 013). \\ G_{1432} &= (332 \pm 023); \quad G_{2341} = (321 \pm 111); \quad G_{2413} = (322 \pm 013); \\ G_{3142} &= (331 \pm 022); \quad G_{4123} = (321 \pm 003); \quad G_{3214} = (321 \pm 012). \\ G_{1342} &= (332 \pm 022); \quad G_{1423} = (322 \pm 003); \quad G_{2143} = G_{2134} \cdot G_{1243}; \\ G_{2314} &= (321 \pm 011); \quad G_{3124} = (321 \pm 002). \\ G_{1243} &= (333 \pm 003); \quad G_{1324} = (322 \pm 002); \quad G_{2134} = (321 \pm 001). \\ G_{1234} &= (321 \pm 000) = 1. \end{aligned}$$

On remarquera que, mis à part G_{2143} , les polynômes de Grothendieck s'expriment à l'aide d'une seule fonction de Schur. Pour un groupe $\mathfrak{G}(A)$ quelconque, les permutations μ telles que G_μ ou X_μ soient égaux à une fonction de Schur sont dites *vexillaires* (cf. [20] pour la définition et [19] pour les différentes caractérisations de ces permutations).

Le Lemme 2.11 permet de décomposer les $(1/\rho)\pi_\mu$ dans la base $\{\zeta\}$:

$$R_\zeta\left(\frac{1}{\rho}\pi_\mu\right) = G_{\omega\mu}\zeta^{-1}\omega\theta\zeta/\Delta^\zeta, \quad (4.5)$$

d'où, à l'aide du Lemme 2.12:

$$R_{\xi}(\pi_{\mu}) = G_{\omega\mu} \xi^{-1} \omega \theta \xi \rho^{\xi} / \Delta^{\xi}. \quad (4.6)$$

En d'autres termes, le développement de π_{μ} dans la base canonique $\{\xi\}$ est fourni par les spécialisations des polynômes de Grothendieck—par le morphisme

$$\xi^{-1} \omega \theta \omega \xi : y_1 \rightarrow a_1 \xi, \dots, y_{n+1} \rightarrow a_{n+1} \xi.$$

Ainsi le polynôme de Grothendieck $G_{321} \pi_1 \pi_2 = G_{213} = (1 - x/a)$ a comme spécialisations non nulles

$$G_{213} \omega \theta \omega = 1 - c/a = G_{213} \sigma_1 \omega \theta \omega \sigma_1$$

et

$$G_{213} \sigma_2 \omega \theta \omega \sigma_2 = 1 - b/a = G_{213} \sigma_2 \sigma_1 \omega \theta \omega \sigma_1 \sigma_2,$$

ce qui entraîne d'après (4.6) le développement

$$\begin{aligned} \pi_1 \pi_2 = & \frac{ab}{(a-b)(a-c)} - \sigma_1 \frac{b^2}{(a-b)(b-c)} \\ & - \sigma_2 \frac{ac}{(a-c)(b-c)} + \sigma_1 \sigma_2 \frac{c^2}{(a-c)(b-c)}. \end{aligned}$$

Les $R_{\xi}(\pi_{\mu})$ sont notés $b_{\mu, \xi}$ par [2, 16, 14].

La définition des opérateurs π_{μ} et ψ_{μ} peut s'étendre à la K -théorie équivariante des variétés de drapeaux, et même des algèbres de Kac–Moody [14, 16]. Brion nous a fait remarquer que le principe de localisation s'étend à la K -théorie; en d'autres termes, le morphisme qui associe à la variété de Schubert d'indice μ l'élément $(\Delta/\rho)\pi_{\mu}$ est l'injection naturelle de la K -théorie T -équivariante de la variété de drapeaux dans $\mathcal{E}$ [16, Théorème 2.2].

Tenant compte du facteur Δ/ρ , on obtient à partir de (4.1) le développement de ces opérateurs dans la base $\{\xi\}$:

$$R_{\xi}\left(\frac{\Delta}{\rho} \pi_{\mu}\right) = G_{\omega\mu} \xi^{-1} \omega \theta \omega \xi. \quad (4.7)$$

Les images des variétés de Schubert dans $\mathcal{E}$ ont donc pour composantes (dans la base $\{\xi\}$) les spécialisations des polynômes de Grothendieck par le morphisme $y_1 \rightarrow a_1 \omega \xi, \dots, y_{n+1} \rightarrow a_{n+1} \omega \xi$.

On peut noter que la spécialisation $y_1 \rightarrow 1, \dots, y_{n+1} \rightarrow 1$ du polynôme de Grothendieck G_{μ} est la classe du *faisceau structural* de la variété de Schubert d'indice μ [7, 18, 20], les indéterminées $a_1, \dots, a_{n+1}$ devant s'interpréter comme les classes respectives des fibrés inversibles, dits tautologiques, de la variété de drapeaux.

On peut retrouver les cycles de Schubert à partir des classes des faisceaux structuraux, à l'aide du changement de variables $1 - 1/a_i = \beta_i$. Soient ∂_{μ}^{β} les différences divisées associées à l'alphabet $B = \{\beta_1, \dots, \beta_{n+1}\}$. Il est facile de vérifier que

$$\pi_i = (1 - \beta_{i+1}) \partial_i^{\beta}. \quad (4.8)$$

Ainsi donc l'image de $(1 - 1/a_1)^n \cdots (1 - 1/a_{n+1})^0 = \beta_1^n \cdots \beta_{n+1}^0$ par π_μ a pour terme de plus bas degré en B le polynôme $\beta_1^n \cdots \beta_{n+1}^0 \partial_\mu^\beta$, c'est-à-dire le cycle de Schubert d'indice $\omega\mu$. Ce résultat s'obtient classiquement en prenant le terme de degré minimum du polynôme de Grothendieck en les variables $e^\alpha = 1 + \alpha + \cdots$. Cependant la formule (4.8) permet d'obtenir l'expression exacte des polynômes de Grothendieck en fonction des polynômes de Schubert, et pas seulement leur terme dominant.

On sait par ailleurs [18] que $\psi_\mu = \sum_{\nu \leq \mu} (-1)^{l(\nu)} \pi_\nu$, où l'inégalité est relative à l'ordre d'Ehresmann. Réciproquement, $\pi_\mu = \sum_{\nu \leq \mu} \psi_\nu$; on pourrait aisément retrouver ces deux égalités à l'aide des formules de décomposition dans les bases $\{\pi_\mu\}$ ou $\{\psi_\mu\}$ données ci-dessous. Comme corollaire, on a que la fonction de Möbius du groupe symétrique (pour l'ordre d'Ehresmann) prend ses valeurs dans $\{+1, -1\}$ suivant la longueur [28].

Le développement de ψ_μ provient donc de celui des π_ν :

$$R_\zeta(\psi_\mu) = \sum_{\nu \leq \mu} (-1)^{l(\nu)} G_{\omega\nu} \zeta^{-1} \omega \theta \omega \zeta \rho^\zeta / \Delta^\zeta. \quad (4.9)$$

On a en fait une identité plus compacte, à l'aide de l'involution suivante permettant d'échanger les opérateurs π et ψ (il suffit de prouver (4.10) pour une transposition simple [18]):

$$\omega \frac{1}{\rho} \pi_\mu \rho \omega = (-1)^{l(\mu)} \psi_{\omega\mu\omega}. \quad (4.10)$$

Rassemblant (4.6) et (4.10), on obtient ainsi:

$$R_\zeta(\psi_\mu) = (-1)^{l(\mu)} G_{\mu\omega} \omega \zeta^{-1} \theta \zeta \omega \frac{\rho}{\Delta^\zeta} \omega. \quad (4.11)$$

Inversement, le développement des éléments de $\mathcal{E}$ en fonction des π_μ ou ψ_μ est donné par les deux lemmes, corollaires de Lemme 2.10.

Lemme 4.12. Soit $D = \sum_\mu P_\mu(D) \pi_\mu$, avec $P_\mu \in \mathcal{R}(A)$, un élément de $\mathcal{E}$. Alors $\mu \neq \omega \Rightarrow P_\mu(D) = G_\omega D \psi_{\mu^{-1}\omega} \theta \omega$ et $P_\omega(D) = G_\omega D \theta \omega$.

Ainsi, pour $D = \psi_1 \psi_2 = (\pi_1 - 1)(\pi_2 - 1)$, on trouve $G_{321} D = G_{213} - G_{231} - G_{312} + G_{321}$, d'où $G_{321} D \pi_1 = G_{123} - G_{132}$ et $G_{321} D \pi_2 = 0 = G_{321} D \pi_1 \pi_2$, ce qui donne bien $\psi_1 \psi_2 = \pi_1 \pi_2 - \pi_1 - \pi_2 + 1$.

Les $P_\mu(\zeta)$ sont notés $e^{\mu, \zeta}$ par [14].

Similairement, le développement dans la base des $\{\psi_\mu\} \cup \{1\}$ est:

Lemme 4.13. Soit $D = \sum_{\mu, \mu \neq \text{id}} \check{P}_\mu(D) \psi_\mu + \check{P}_{\text{id}} 1$, avec $\check{P}_\mu \in \mathcal{R}(A)$, un élément de $\mathcal{E}$. Alors $\check{P}_\mu(D) = G_\omega D \pi_{\mu^{-1}\omega} \theta \omega$ et $\check{P}_{\text{id}}(D) = G_\omega D \pi_\omega \theta \omega$.

Par exemple, soit $D = \partial_2 \partial_1$. Alors

$$\begin{aligned} G_{321}D &= (1 - x/b)(1 - x/a)(1 - y/a)\partial_2\partial_1 \\ &= (1 - x/b)\partial_2(1 - x/a)(1 - y/a)\partial_1 \\ &= (x/bc)(1 - x/a)(1 - y/a)\partial_1 \\ &= (x/abc)(1 - xy/ab). \end{aligned}$$

On a donc $G_{321}D = G_{321}D\pi_2$ et $G_{321}D\pi_1 = G_{321}D\pi_2\pi_1 = G_{321}D\pi_1\pi_2 = G_{321}D\pi_1\pi_2\pi_1 = x/abc$, d'où en prenant l'image de ces fonctions par $\theta\omega$, le développement:

$$\partial_2\partial_1 = (1/ab)(\psi_2\psi_1 + \psi_1 + \psi_2 + 1).$$

Les résultats de cette section peuvent aussi s'obtenir à l'aide du produit scalaire sur $\mathcal{R}(A)$: $\forall P, Q \in \mathcal{R}(A)$, $\langle P, Q \rangle := PQ\pi_\omega$; en effet, la base des polynômes de Grothendieck et sa base adjointe sont échangées par une involution élémentaire [18], ce qui permet de décomposer explicitement les éléments de $\mathcal{R}(A)$ dans chacune de ces deux bases.

Outre de nombreuses remarques destinées à améliorer l'exposition, le rapporteur a bien voulu apporter les précisions géométriques suivantes que nous avons adaptées de son rapport car elles motivent les formules données dans cet article:

There is a very important conceptual nuance in the definition of operators acting on the different cohomology groups $H^*(X)$ of a flag manifold X . In [5], the A_i are a priori defined on an algebra $S(\mathfrak{h}^*)$ and the existence of the generalizations A_μ is obtained only through the combinatorics associated with the Bruhat order on the Weyl group. Therefore what we have at the start are algebraic objects. [5] used Borel's result, which shows that the characteristic morphism (Chern–Weil morphism) $\alpha : S(\mathfrak{h}^*) \rightarrow H^*(X)$ is surjective and has as kernel the ideal $\mathcal{J}$ generated by the symmetric polynomials without constant terms; after noticing that the A_μ stabilize $\mathcal{J}$, they use them as 'natural' operators on the cohomology of X . Incidentally, we recall that these cohomological operators are in fact denoted $\tilde{A}_\mu$. The main result of [5] is the equality, which has become classical,

$$\langle X_\mu, \alpha(P) \rangle = A_\mu(P)(0),$$

for every $P \in S(\mathfrak{h}^*)$. Their proof uses cohomological and geometrical techniques, but these techniques are not intrinsic to the definition of the A_μ . In other words, one can say that this cohomological action, though natural, is 'a posteriori'.

There have been numerous works generalizing [5] in different directions; more precisely as concerns the flag varieties associated with the Kac–Moody groups, the work of Kostant–Kumar [13] is rather satisfactory. Nevertheless, here too, these operators, now denoted x_μ are introduced in a purely algebraic context and still act on the cohomology of X only a posteriori. The same remark applies to the cited Demazure's articles. In all these works, one can rightly consider that the A_μ are purely algebraico–combinatorial objects. The right a priori cohomological

definition appears in Demazure's unpublished notes (cf. Marlin for the geometric finite dimensional non-equivariant case, Arabia for the topological, equivariant and Kac–Moody case; cf. also Kac (with Peterson) for the topological case as well as the Kac–Moody case. Unfortunately, the reference “*Cohomology of infinite-dimensional groups and their flag varieties*” has never been published to my knowledge). There is however a nonnegligible factor in favor of Demazure's approach. Though Demazure and Kac define the A_i through the composition $\pi_i^* \pi_{i*}$ for the canonical projection π_i of G/B on G/P_i , only Demazure has succeeded in defining the A_μ for the cohomology and for every μ , *without having recourse to the combinatorics of Coxeter groups*. Indeed, let $\mathcal{F}_\mu$ be the adherence of the G -orbit of the point (e, μ) in the variety $X \times X$ on X . Let us denote p_i the restrictions to T_μ of the canonical projections of $X \times X$ on X . Then one has $A_\mu = p_1 \cdot p_2^*$ (confer [3]). Thus it appears that among the numerous ways of introducing the operators in question, there is one, derived from Demazure's work, which is truly specific to the cohomological context. On the other hand, the explicitation of the coefficients $R_\zeta(\Delta \partial_\mu)$ by Arabia is obtained from a ‘desingularisation of Schubert varieties. This has the consequence that his computations are intrinsic only for the smooth case (e.g., if μ is the product of mutually distinct simple transpositions, or if μ is the longest element of the Weyl group in the finite dimensional case), but then the interpretation of the rational functions in equivariant cohomology results from a paper by Atiyah–Bott (The moment map and equivariant cohomology, *Topology* 23 (1984) 1–28—there must exist earlier references) where these coefficients are identified with equivariant analogs of Euler classes of subvarieties of fixed points (result rediscovered by Berline–Vergne: Fourier transforms of orbits of the coadjoint representation, *Proceedings of the conference on ‘Representation of reductive groups’*, Park City, Utah, 1982 in the context of differential geometry, when the fixed points are isolated). A closer inspection shows that the only justification one can give for the fact that these invariants are of a cohomological nature in the singular case, if we wanted to obtain this from Arabia's work, would come exclusively from the Atiyah–Segal isomorphism.

In fact, the work of Berline–Vergne [4], Arabia [2, 3] and Kostant–Kumar [19], in that order, strongly suggests that the coefficients $R_\zeta(\Delta \partial_\mu)$ should in all cases, regular as well as singular, be interpreted as geometrical and even topological, invariants, and that they should be given an intrinsic definition. This is this idea which is behind the theory developed by Rossmann, who gives a definition of *equivariant multiplicities* in the framework of algebraic geometry.

References

- [1] A. Arabia, Cycles de Schubert et cohomologie K -équivariante de K/T , Thèse, Université Paris 7, 1985.

- [2] A. Arabia, Cohomologie T -équivariante de G/B pour un groupe G de Kac-Moody, *Invent. Math.* 85 (1986) 39–52.
- [3] A. Arabia, Cohomologie T -équivariante de la variété de drapeaux d'un groupe de Kac-Moody, preprint, 1986.
- [4] N. Berline et M. Vergne, Zéros d'un champ de vecteurs et classes caractéristiques équivariantes, *Duke Math. J.* 50 (1983) 539–549.
- [5] I.N. Bernstein, I.M. Gelfand et S.I. Gelfand Schubert cells and cohomology of the spaces G/P , *Uspekhi. Mat. Nauk* 28 (1973) 3–26.
- [6] N. Bourbaki, *Algèbre* (Hermann, Paris).
- [7] M. Demazure, Désingularisation des variétés de Schubert, *Ann. Économ. Statist.* 6 (1974) 163–172.
- [8] M. Demazure, Une nouvelle formule des caractères, *Bull. Sci. Math.* 98 (1974) 163–172.
- [9] M. Demazure Invariants symétriques entiers des groupes de Weyl et torsion, *Invent. Math.* 21 (1973) 287–301.
- [10] E. Gutkin, Operator calculi associated with reflection groups; Reflection groups, generalized BGG calculus, preprints, 1986.
- [11] E. Gutkin et P. Slodowy, Cohomologie des variétés de drapeaux infinies, *C.R. Acad. Sci. Paris* 296 (1983) 625.
- [12] V. Kac, Torsion in cohomology of compact Lie groups and Chow rings of reductive algebraic groups, *Invent. Math.* 80 (1985) 69–79.
- [13] B. Kostant et S. Kumar, The Nil Hecke ring and cohomology of G/P for a Kac-Moody group G , *Adv. in Math.* 62 (1986) 187–237.
- [14] B. Kostant et S. Kumar, T -equivariant K -theory of generalized flag varieties, *J. Differential Geom.* (1990) 549–603.
- [15] W. Kraskiewicz et P. Pragacz, Foncteurs de Schubert, *C.R. Acad. Sci. Paris* 304 (1987) 209–212.
- [16] S. Kumar, A connection of equivariant K -theory with the singularity of Schubert varieties, preprint, 1988.
- [17] A. Lascoux, Classes de Chern des variétés de drapeaux, *C.R. Acad. Sci. Paris* 295 (1982) 393–398.
- [18] A. Lascoux, Anneau de Grothendieck de la variété de drapeaux, dans: *The Grothendieck Festschrift, Progr. Math.*, Vol. 88 (Birkhäuser, Boston, 1990) 1–34.
- [19] A. Lascoux et M.P. Schützenberger, Polynômes de Schubert, *C.R. Acad. Sci. Paris* 294 (1982) 447.
- [20] A. Lascoux et M.P. Schützenberger, Structure de Hopf. . . , *C.R. Acad. Sci. Paris* 295 (1982) 629.
- [21] A. Lascoux et M.P. Schützenberger, Symmetry and Flag manifolds, in: *Invariant Theory, Lecture Notes in Mathematics* 966 (Springer, Berlin, 1983) 118–149.
- [22] A. Lascoux et M.P. Schützenberger, Interpolation de Newton à plusieurs variables, *Séminaire d'Algèbre M.P. Malliavin 1983–84, Lecture Notes in Mathematics* 1146 (Springer, Berlin, 1985) 161–175.
- [23] A. Lascoux et M.P. Schützenberger, Symmetrization operators on polynomial rings, *Funct. Anal. Appl.* 21 (1987) 77–78.
- [24] A. Lascoux et M.P. Schützenberger, Keys and standard bases, in: D. Stanton, ed., *Invariant Theory and Tableaux, Mathematics and its Applications* 19 (Springer, Berlin, 1990) 125–144.
- [25] A. Lascoux et M.P. Schützenberger, Tableaux and non commutative Schubert polynomials, *Funct. Anal. Appl.* 23 (1989) 63–64.
- [26] I.G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Oxford Mathematical Monographs (Oxford Univ. Press, Oxford, 1979).
- [27] W. Rossmann, Equivariant multiplicities on complex varieties, prépublication, 1987.
- [28] D.N. Verma, Möbius inversion for the Bruhat ordering on a Weyl group, *Ann. École Normale Supérieure* 4 (1971) 393–399.