

# Décompositions dans l'algèbre des différences divisées

Alain Lascoux & Marcel-Paul Schützenberger

*version transitoire, dec.1989*

ABSTRACT. — The group algebra of the symmetric group on the ring of rational functions has, apart from its canonical basis of permutations, several bases of *symmetrizing operators*, among which the classical Newton's *divided differences*. We deal here with the explicitation of the matrices of change of bases. Our main result is that, in the case of  $Gl(n)$ , the components of the matrices associated to the classical bases are just specializations of *Schubert* or *Grothendieck polynomials* (proposition 3.2, formulas 3.9, 4.5, 4.6, 4.7, 4.11). We refer to the work of Arabia, Bernstein-Gelfand-Gelfand, Kac, Kostant, Kumar, Rossmann for the interpretation of these matrices in terms of (equivariant) cohomology and K-theory rings of the flag manifold, or equivariant singularities of Schubert varieties. Our main technical tool is the simple observation that all but one specialization of the maximal twofold Schubert polynomial  $\mathbb{X}$  vanish (lemma 2.10).

## 1. Introduction

L'algèbre du groupe symétrique  $\mathfrak{S}(A)$  d'un ensemble d'indéterminées  $A$  est étudiée depuis Frobenius et Young. De nouvelles propriétés apparaissent lorsque l'on prend le produit tensoriel *tordu* ([**Bou**, III.180, ex.11] dit *produit croisé*; [**Ko-Ku 1,2**] emploient le terme *smash product*) avec le corps des fractions rationnelles  $\mathcal{R}(A)$  de l'algèbre symétrique associée à  $A$ , les coefficients dans le corps des fonctions rationnelles en les variables sur lesquelles agit le groupe, au lieu de coefficients dans le corps des complexes. Cette algèbre, que nous notons  $\mathcal{E}$  admet d'autres bases que la base canonique des permutations, en particulier les différences divisées de Newton; c'est pourquoi nous l'appelons "Algèbre des différences divisées".

Un point de vue alternatif consiste en la caractérisation des opérateurs sur l'anneau des polynômes, vérifiant les relations de Coxeter : on retrouve, après tensorisation par  $\mathcal{R}(A)$ , l'algèbre  $\mathcal{E}$ , cf.[**La-Sch 5**], cette fois-ci comme réalisation concrète de l'algèbre de Hecke du groupe symétrique.

La géométrie fournit différentes interprétations de l'algèbre  $\mathcal{E}$  comme algèbre d'opérateurs sur l'anneau de cohomologie, de Grothendieck, la cohomologie équivariante ou la K-théorie équivariante de la variété de drapeaux. Suivant l'interprétation choisie, il faudra identifier  $\alpha, e^\alpha, \dots$  au quotient de deux variables consécutives :  $a_1/a_2, \dots$ , et les opérateurs de  $\mathcal{E}$  aux opérateurs naturels pour ces différentes théories cohomologiques. L'avantage présent de la combinatoire est que l'on mène simultanément les calculs dans les différentes théories, et même, que l'on obtient par exemple, des relations explicites entre les polynômes qui relèvent les cycles de Schubert et ceux qui relèvent les caractères de Demazure ([**La-Sch 7**]) quoique ces objets appartiennent de fait à des catégories différentes. Plus encore, on peut étendre les constructions à l'*algèbre libre* [**La-Sch 6**] et retrouver ainsi *tableaux de Young*, *bases standard*, etc... en liaison avec l'algèbre  $\mathcal{E}$ .

Un des problèmes intéressants de la théorie consiste en l'explicitation des différentes matrices de changement de base.

Nous montrons ici que les principales de ces matrices, considérées en particulier par [Ara 2, 3], [Ko-Ku 1, 2], [Kum], [Ros], sont données par les polynômes de Schubert et ceux de Grothendieck ( prop. 3.2, formules 3.8, 3.9, 4.6, 4.7, 4.11 ).

Rappelons que les polynômes de Schubert interviennent par ailleurs :

- comme base de l'anneau des polynômes en tant que module libre sur l'anneau des polynômes symétriques [La-Sch 1] (résultat implicite dans [B-G-G], décrit dans un autre contexte par [Ara 1, p.42]).
- comme base de la cohomologie des variétés de drapeaux associées aux groupes linéaires [B-G-G], [Dem 1], [La-Sch 1].
- comme coefficients dans la formule d'interpolation de Newton à plusieurs variables [La-Sch 4].
- comme caractères irréductibles [Kr-Pr] .
- comme généralisation des fonctions de Schur dans la troisième édition du livre de [Mac].

*Attention* : Les opérateurs agissent sur tout ce qu'ils trouvent sur leur gauche.

## 2. Différences divisées

Soient  $A = \{a_1, \dots, a_{n+1}\}$  un ensemble totalement ordonné d'indéterminées (un *alphabet*) et  $\mathcal{R}(A)$  l'anneau des fonctions rationnelles en  $A$ . On note  $\mathfrak{S}(A)$  le groupe symétrique sur  $A$ ,  $\omega$  son élément maximal. Pour tout  $f \in \mathcal{R}(A)$ ,  $f^\mu$  est l'image de  $f$  par la permutation  $\mu$ .

Soit  $\mathcal{E}$  l'algèbre des opérateurs  $D$  sur  $\mathcal{R}(A)$ , du type  $D = \sum_{\zeta \in \mathfrak{S}(A)} \zeta R_\zeta(D)$ , où les coefficients  $R_\zeta(D)$  appartiennent à  $\mathcal{R}(A)$ . L'anneau  $\mathcal{R}(A)$  s'injecte canoniquement dans  $\mathcal{E}$  :

$$\mathcal{R}(A) \ni f \longrightarrow \text{"opérateur multiplication par } f\text{"} .$$

Pour éviter les exposants trop volumineux, nous noterons aussi  $f\mu \in \mathcal{R}(A)$  la fonction  $f^\mu$ , ou dirons "la fonction  $f\mu$ " ou "le polynôme  $f\mu$  lorsque nous voudrions distinguer ces derniers de l'opérateur composé de "multiplication par  $f$ " par "permutation  $\mu$ ".

L'algèbre  $\mathcal{E}$  est un  $\mathcal{R}(A)$ -module à gauche, aussi bien qu'à droite, les deux structures s'échangeant par l'égalité

$$\text{Pour tout couple } (f, \mu) : f \in \mathcal{R}(A), \mu \in \mathfrak{S}(A), \quad \mu f = f^{\mu^{-1}} \mu \quad .$$

Le produit dans  $\mathcal{E}$  est donné par

$$(2.1) \quad \sum_{\zeta} \zeta R_{\zeta}(D) \cdot \sum_{\nu} \nu R_{\nu}(D') = \sum_{\zeta, \nu} \zeta \nu (R_{\zeta}(D))^{\nu} R_{\nu}(D')$$

On a dans  $\mathcal{E}$  des opérateurs, indexés par les éléments de  $\mathfrak{S}(A)$ , remis à l'honneur par l'étude des variétés de drapeaux : les *différences divisées*  $\partial_{\mu}$  dues à Newton, les *symétriseurs convexes*  $\pi_{\mu}$ , les *symétriseurs concaves*  $\psi_{\mu}$ .

La définition de ces opérateurs est, dans le cas où  $\mu$  est la transposition simple  $\sigma_i$  échangeant  $a_i$  et  $a_{i+1}$ , en employant alors la notation  $\partial_i, \pi_i, \psi_i$  :

$$(2.2) \quad \begin{cases} \partial_i = \frac{1}{(a_i - a_{i+1})}(1 + \sigma_i) \\ \pi_i = \frac{1}{(1 - a_{i+1}/a_i)}(1 + \sigma_i) = a_i \partial_i \\ \psi_i = (\sigma_i - 1) \frac{1}{(1 - a_i/a_{i+1})} = \partial_i a_{i+1} = \pi_i - 1 \end{cases}$$

Il faut compléter 2.2 par les valeurs en  $\mu = \text{identité}$  qui sont respectivement  $\partial_{id} = 1$ ,  $\pi_{id} = 1$ ,  $\psi_{id} = 0$ .

Chaque famille d'opérateurs  $\{\sigma_i\}$ ,  $\{\partial_i\}$ ,  $\{\pi_i\}$ ,  $\{\psi_i\}$  vérifie séparément les relations de Moore/Coxeter (en écrivant  $\{D_i\}$  pour l'une quelconque de ces familles) :

$$(2.3) \quad D_i D_j = D_j D_i \text{ si } |i - j| \geq 2 \quad ,$$

$$(2.4) \quad D_i D_{i+1} D_i = D_{i+1} D_i D_{i+1} \quad .$$

Les relations 2.3 et 2.4 impliquent que les  $\partial_{\mu}, \pi_{\mu}, \psi_{\mu}$  peuvent s'écrire comme le produit d'opérateurs *élémentaires*  $\partial_i, \pi_i, \psi_i$  correspondant à une décomposition réduite arbitraire de  $\mu$  (*i.e.* écriture de  $\mu$  comme un produit de longueur minimale de transpositions simples).

On peut remarquer que

$$(2.5) \quad \begin{cases} \partial_i \partial_i & = & 0 \\ \pi_i \pi_i & = & \pi_i \\ \psi_i \psi_i & = & -\psi_i \end{cases} \quad .$$

Dans [La-Sch 5] (voir aussi [Gut]), on donne des opérateurs plus généraux satisfaisant, en plus des relations de Coxeter, la relation de Hecke

$$(2.6) \quad D_i D_i = q D_i + r \quad .$$

Les opérateurs correspondant à la permutation maximale  $\omega$  de  $\mathfrak{S}(A)$ , ont une expression globale, outre leurs différentes expressions comme produits d'opérateurs élémentaires [La-Sch 3] :

$$(2.7) \quad \partial_\omega = \frac{1}{\Delta} \sum_{\mu \in \mathfrak{S}(A)} \mu \quad ,$$

$$(2.8) \quad \pi_\omega = \frac{\rho}{\Delta} \sum_{\mu \in \mathfrak{S}(A)} \mu \quad ,$$

$$(2.9) \quad \psi_\omega = \frac{1}{\Delta} \sum_{\mu \in \mathfrak{S}(A)} \mu \rho^\omega \quad ,$$

où  $\Delta$  est le *Vandermonde* :  $\Delta = \prod_{i < j} (a_i - a_j)$  et  $\rho$  le monôme  $a_1^n a_2^{n-1} \cdots a_{n+1}^0$  (qui correspond à la demi-somme des racines positives), de sorte que  $\rho^\omega = a_1^0 a_2^1 \cdots a_{n+1}^n$ .

En d'autres termes, pour toute fonction  $f \in \mathcal{R}(A)$ , son image  $f\partial_\omega$  par  $\partial_\omega$  est la somme des transformées de  $f/\Delta$  par toutes les permutations  $\mu \in \mathfrak{S}(A)$ ,  $f\psi_\omega$  s'obtient en multipliant  $f\partial_\omega$  par  $\rho^\omega$  tandis que  $f\pi_\omega$  est la somme des transformées de  $f\rho/\Delta$  par les  $\mu \in \mathfrak{S}(A)$ .

On simplifie beaucoup les calculs dans  $\mathcal{E}$  en faisant agir les éléments de  $\mathcal{E}$  sur un élément approprié de  $\mathcal{R}(A)$  plutôt que d'utiliser les relations 2.3, 2.4, 2.5. Pour cela, on introduit un deuxième alphabet  $Y = \{y_1, \dots, y_{n+1}\}$  de même cardinal que  $A$ , les éléments de  $Y$  étant supposés invariants par les éléments de  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{R}(A)$  désignant dorénavant les fonctions rationnelles en  $A$  à coefficients les fonctions rationnelles en  $Y$ . Soit de plus  $\theta$  la spécialisation  $Y \longrightarrow A$ , i.e.  $y_1 \rightarrow a_1, \dots, y_{n+1} \rightarrow a_{n+1}$ .

Dans le cas des différences divisées, on part du polynôme

$$\mathbb{X} = \prod_{i+j \leq n+1} (a_i - y_j) \quad ,$$

dont la faculté essentielle, qui montre que  $\mathbb{X}$  est la "polarisation" du Vandermonde, est la propriété d'annulation suivante (provenant directement de ce qu'un des facteurs au moins du polynôme  $\mathbb{X}^\mu \theta$  s'annule, sauf lorsque  $\mu = \omega$ ) :

LEMME (2.10). — *Les opérateurs  $\mathbb{X}\mu\theta$  sont tous nuls, sauf  $\mathbb{X}\omega\theta = \Delta\omega$ .*

Le lemme permet de décomposer tout élément de  $\mathcal{E}$  dans la base canonique  $\{\zeta\}$ , ainsi que nous l'avons indiqué dans [La-Sch 5] :

COROLLAIRE (2.11). — *Soit  $D = \sum \zeta R_\zeta(D)$  un élément de  $\mathcal{E}$ . Alors  $R_\zeta(D) = \mathbb{X}\omega\zeta^{-1} D\theta / \Delta^\omega = \mathbb{X} \frac{1}{\Delta} \omega\zeta^{-1} D\theta \in \mathcal{R}(A)$ .*

*Preuve* : l'image par  $\theta$  de la somme  $\sum_{\nu} \mathbb{X} \omega \zeta^{-1} \nu R_{\nu}(D)$  se réduit à un seul terme d'après 2.10 .  $\square$

En d'autres termes, le coefficient  $R_{\zeta}(D)$  s'obtient comme image du polynôme  $\mathbb{X}$  par la suite d'opérations : multiplication par  $1/\Delta$  , permutation par  $\omega \zeta^{-1}$  , application de  $D$  et spécialisation  $\theta$  .

Les coefficients  $R_{\zeta}(D)$  sont compatibles avec la composition par les éléments de  $\mathcal{E}$ , ainsi que le montre le lemme suivant dont la preuve est la même que celle de 2.11 :

**LEMME (2.12)** . — Soient  $P \in \mathcal{R}(A)$  ,  $\eta \in \mathfrak{S}(A)$  . Alors , pour toute permutation  $\zeta$ , pour tout élément  $D$  de  $\mathcal{E}$  , on a :

$$R_{\zeta}(\eta P D) = P \eta^{-1} \zeta R_{\eta^{-1} \zeta}(D) .$$

### 3. Polynômes de Schubert

Les images de  $\mathbb{X}$  par les différences divisées  $\partial_{\mu}$  sont par définition les *Polynômes de Schubert* (doubles). Plus précisément [Las 1] :

*Définition (3.1)* . — Le polynôme de Schubert  $X_{\mu}$  d'indice  $\mu \in \mathfrak{S}(A)$  est égal à  $\mathbb{X} \partial_{\omega \mu}$  .

L'indexation est choisie de sorte que  $X_{\omega} = \mathbb{X}$ ; cet élément doit s'interpréter, en cohomologie, comme la classe de la diagonale pour le plongement diagonal de la variété de drapeaux. L'élément  $X_{\omega \omega}$  est quant à lui égal à 1 ( $\omega \omega$  = identité). La base des *cycles de Schubert* s'obtient par spécialisation des  $X_{\mu}$  en  $y_1 = \dots = y_{n+1} = 0$ ; comme les éléments de  $Y$  sont des scalaires pour les différences divisées, les cycles de Schubert sont donc les images par les différences divisées de la spécialisation de  $X_{\omega}$  , i.e. du monôme  $\rho$  [La-Sch 3] .

Par exemple, pour  $A = \{a, b, c, d\}$  et  $Y = \{x, y, z, \tilde{z}\}$  de cardinal 4 , on a, en écrivant en indice  $ijkh$  plutôt que  $a_i a_j a_h a_k$  :

$$\mathbb{X} = X_{4321} = (a - x)(a - y)(a - z)(b - x)(b - y)(c - x)$$

$$X_{3421} = X/(a - z); X_{4231} = X/(b - y); X_{4312} = X/(c - x)$$

$$\begin{aligned} X_{2431} &= (a - x)(b - x)(c - x)(a + b - y - z); X_{3241} = X/(a - z)(b - y); \\ X_{3412} &= X/(a - z)(c - x); X_{4132} = (a - x)(a - y)(a - z)(b + c - x - y); \\ X_{4213} &= X/(b - y)(c - x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{2341} &= (a - x)(b - x)(c - x); X_{1432} = a^2 b + a^2 c + ab^2 + abc + b^2 c - (a^2 + ab + \\ &b^2)(x + y) - (ab + ac + bc)(x + y + z) + (a + b)(x^2 + xy + y^2) + (a + b + c)(xy + \end{aligned}$$

$$xz + yz) - (x^2y + x^2z + xy^2 + xyz + y^2z); X_{2413} = (a-x)(b-x)(a+b-y-z); \\ X_{3142} = (a-x)(a-y)(b+c-x-y); X_{3214} = (a-x)(a-y)(b-x); \\ X_{4123} = (a-x)(a-y)(a-z).$$

$$X_{1342} = ab + ac + bc - (x+y)(a+b+c) + x^2 + xy + y^2; X_{1423} = a^2 + ab + b^2 - (a+b)(x+y+z) + xy + xz + yz; X_{2143} = (a-x)(a+b+c-x-y-z); \\ X_{2314} = (a-x)(b-x); X_{3124} = (a-x)(a-y).$$

$$X_{1243} = a + b + c - x - y - z; X_{1324} = a + b - x - y; X_{2134} = a - x.$$

$$X_{1234} = 1$$

Les polynômes de Schubert sont invariants par le plongement  $\mathfrak{S}(\{a_1, \dots, a_n\}) \longrightarrow \mathfrak{S}(\{a_1 \dots a_{n+1}\})$  (adjonction du point fixe  $a_{n+1}$ ); ainsi, les polynômes pour  $\mathfrak{S}(\{a, b, c\})$  correspondent-ils, dans la table précédente, aux permutations  $\mu$  telles que  $d\mu = d$ .

Le corollaire 2.11 donne la décomposition des différences divisées dans la base canonique  $\{\zeta\}$  en fonction des polynômes  $X\nu\partial_\mu\theta$ . Combinant avec 2.12, on obtient cette décomposition en fonction des spécialisations des polynômes de Schubert :

**PROPOSITION (3.2).** — *Pour tout couple de permutations  $\mu, \zeta$ , les coefficients  $R_\zeta(\partial_\mu)$  sont égaux à  $\frac{X}{\Delta} \omega \zeta^{-1} \partial_\mu \theta = X_{\omega\mu} \zeta^{-1} \omega \theta \omega \zeta / \Delta^\zeta$ , c'est-à-dire l'on a*

$$\partial_\mu = \sum_{\zeta} \zeta (X_{\omega\mu} \zeta^{-1} \omega \theta \omega \zeta / \Delta^\zeta).$$

Par exemple, le polynôme de Schubert  $X_{1423} = X_{4321} \partial_3 \partial_2 \partial_1 \partial_3 = a^2 + ab + b^2 - (a+b)(x+y+z) + xy + xz + yz$  a comme seules spécialisations non nulles tous les  $X_{1423} \nu^{-1} \omega \theta \omega \nu = (a-c)(a-d)$  et  $X_{1423} \sigma_1 \nu^{-1} \omega \theta \omega \nu \sigma_1 = (b-c)(b-d)$ , où  $\nu$  parcourt  $\mathfrak{S}(a) \times \mathfrak{S}(\{b, c, d\})$ , i.e. où  $\nu$  est telle que  $a\nu = a$ . La proposition 3.2 entraîne donc le développement  $\partial_3 \partial_2 \partial_1 \partial_3 = (1 - \sigma_2 - \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2) \left( \frac{(a-c)(a-d)}{\Delta} - \sigma_1 \frac{(b-c)(b-d)}{\Delta} \right)$ .

On prendra garde que les polynômes  $X \omega \zeta^{-1} \partial_\mu$  et  $X_{\omega\mu} \zeta^{-1} \omega$  sont différents, quoique leurs images par  $\theta$  coïncident à permutation près d'après 3.2.

Pour le groupe symétrique  $\mathfrak{S}(a, b, c)$ , la matrice de changement de base est :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1\Delta = (a-b)(a-c)(b-c) \\ \partial_1\Delta = (1-\sigma_1)(a-c)(b-c) \\ \partial_2\Delta = (1-\sigma_2)(a-b)(a-c) \\ \partial_1\partial_2\Delta = (1-\sigma_1)(a-c) + (\sigma_1-1)\sigma_2(a-b) \\ \partial_2\partial_1\Delta = (1-\sigma_2)(a-c) + (\sigma_2-1)\sigma_1(b-c) \\ \partial_1\partial_2\partial_1\Delta = 1 - \sigma_1 - \sigma_2 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_1 - \sigma_1\sigma_2\sigma_1 \end{array} \right.$$

Ces coefficients sont notés  $c_{\mu,\zeta}$  par [Ko-Ku 1], [Kum] et  $q_{\mu^{-1}}^{\zeta^{-1}}$  par [Ara 3].

On corrobore le fait que

$$(3.3) \quad \nu > \mu \Rightarrow R_\nu(\partial_\mu) = 0$$

(l'ordre sur les permutations est celui d'Ehresmann, dit aussi *de Bruhat*, dit aussi *strong order*). Comme l'application réciproque est aussi vrai, on a là, ainsi que le remarque le rapporteur, une caractérisation intéressante de l'ordre de Ehresmann/Bruhat (voir aussi [Ko-Ku 1 et 2], [Ros], [Kum] .

Il suit de 3.3 que l'on peut reformuler 2.10 en :

LEMME 3.4 . — *Les opérateurs  $\mathbb{X}\partial_\mu\theta$  , où les  $\mu \in \mathfrak{S}(A)$  , sont nuls, sauf  $\mathbb{X}\partial_\omega\theta = \omega$  .*

En particulier, considérant l'image de 1 par les opérateurs  $\mathbb{X}\partial_\mu\theta$ , on obtient :

LEMME 3.5 . — *Pour toute permutation  $\mu$  , le polynôme  $X_{\omega\mu}\theta$  est nul, sauf  $X_{\omega\omega}\theta = X_{\omega\omega} = 1$  .*

La relation 2.5 implique que  $\partial_\mu\partial_\nu = \partial_{\mu\nu}$  ou 0 suivant que  $\ell(\mu\nu) = \ell(\mu) + \ell(\nu)$  ou non. Du lemme 3.4 s'ensuit donc le développement de tout élément de  $\mathcal{E}$  dans la base  $\{\partial_\mu\}$  :

LEMME 3.6 . — *Soit  $D = \sum_\zeta Q_\zeta(D)\partial_\zeta$  , avec  $Q_\zeta(D) \in \mathcal{R}(A)$ , un élément de  $\mathcal{E}$ . Alors  $Q_\zeta(D) = \mathbb{X} D \partial_{\zeta^{-1}\omega} \theta \omega$  .*

*Preuve* . La somme  $\mathbb{X} \sum_\nu Q_\nu(D) \partial_\nu \partial_{\zeta^{-1}\omega} \theta \omega = \sum_\nu Q_\nu(D) \mathbb{X} \partial_\nu \partial_{\zeta^{-1}\omega} \theta \omega$  se réduit au seul terme  $Q_\zeta(D) \omega \omega = Q_\zeta(D)$  puisque tous les opérateurs  $\mathbb{X}\partial_\mu\theta$  sont nuls, sauf  $\mathbb{X}\partial_\omega\theta$  .  $\square$

Nous avons déjà en [La-Sch 5] attiré l'attention sur le fait que la matrice des coefficients  $Q_\zeta(\mu)$  est auto-inverse, à symétrie et à multiplication par  $\Delta$  près, ce que l'on retrouve ici en comparant 3.2 et 3.6 (Kumar a aussi remarqué cette propriété) :

$$(3.7) \quad \frac{1}{\Delta} Q_\zeta(\mu) = R_{\mu^{-1}\omega}(\partial_{\zeta^{-1}\omega}) \omega \quad .$$

Ainsi, du développement des  $\partial_\mu$  donné plus haut déduit-on :

$$(3.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = (a-b)\partial_1 - 1 \\ \sigma_2 = (b-c)\partial_2 - 1 \\ \sigma_1\sigma_2 = (a-b)(a-c)\partial_1\partial_2 - (a-b)\partial_1 - (a-c)\partial_2 + 1 \\ \sigma_2\sigma_1 = (a-c)(b-c)\partial_2\partial_1 - (a-c)\partial_1 - (b-c)\partial_2 + 1 \\ \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \omega \\ \quad = \Delta\partial_\omega - (a-b)(a-c)\partial_1\partial_2 - (a-c)(b-c)\partial_2\partial_1 \\ \quad + (a-c)(\partial_1 + \partial_2) - 1 \end{array} \right.$$

Les  $\partial_\mu$  sont les opérateurs naturels en cohomologie de la variété de drapeaux ( pour **[B-G-G]**, la différence divisée  $\partial_\mu$  est  $A_\mu$ , pour **[Dem 3]**, c'est  $D_\mu$  et enfin, chez **[Ko-Ku 1]** on trouve  $x_\mu$  ).

On peut en fait relever les différences divisées en des opérateurs agissant sur la cohomologie T-équivariante de la variété de drapeaux **[Ara 1,2]**, **[Dem, 1979, non publié]**, **[Kac]**, la théorie pouvant même être faite dans le cas plus général d'une algèbre de Kac-Moody ( **[Ara 3]** , **[Ko-Ku 2]** ). Aux différences divisées, on préfère alors les opérateurs  $\Delta\partial_\mu$ . Le lemme 2.12 donne le développement de ces derniers dans la base  $\{\zeta\}$  à partir de celui des  $\partial_\mu$  obtenu en 3.2 :

$$(3.9) \quad R_\zeta(\Delta\partial_\mu) = R_\zeta(\partial_\mu) \Delta^\zeta = X_{\omega\mu} \zeta^{-1} \omega \theta \omega \zeta \quad .$$

Ces coefficients sont donc les spécialisations des polynômes de Schubert par le morphisme  $y_i \rightarrow a_i \omega \zeta$ . Utilisant la méthode de localisation de Berline-Vergne **[Be-Ve]** en cohomologie K-équivariante, Arabia **[Ara 1, 2]** donne une interprétation globale des  $R_\zeta(\Delta\partial_\mu)$  comme des invariants équivariants attachés aux points fixes des variétés de Schubert. Le coefficient  $R_\zeta(\Delta\partial_\mu)$  est similairement et indépendamment interprété par Rossmann **[Ros]** comme multiplicité équivariante de la variété de Schubert d'indice  $\mu$  au point  $\zeta$ .

Indépendamment de toute géométrie, l'induction  $\mu \rightarrow \mu\sigma_i$  permet d'obtenir les coefficients  $R_\zeta(\Delta\partial_\mu)$  à l'aide des sous-mots d'une décomposition réduite arbitraire de  $\mu$  **[Ko-Ku 2]**, **[Kum, lemma 4.4]**, **[Ara 3, prop.3.3]**.

Le morphisme qui envoie la variété de Schubert d'indice  $\mu$  sur l'opérateur  $\Delta\partial_\mu$  est une injection de la cohomologie équivariante de la variété de drapeaux dans l'algèbre  $\mathcal{E}$  ( **[Ara 1,2]** , **[Ko-Ku 2]** ); dans le cas que nous considérons (le groupe linéaire), cette injection résulte des formules explicites que nous donnons ci-dessus.

Le développement 3.9 peut aussi s'obtenir à partir de la *Formule de Leibniz* dans l'algèbre  $\mathcal{E}$  :



$$(3.10) \quad \forall f, \dots, g, h \in \mathcal{R}(A) \quad , \quad f \cdots gh \partial_1 = f \cdots g(h^{\partial_1}) \\ + f \cdots (g^{\partial_1}) h \sigma_1 + \cdots + (f^{\partial_1}) \cdots gh \sigma_1 + \partial_1 f \cdots gh \sigma_1$$

où  $f, \dots, g, h$  dénotent des éléments de  $\mathcal{R}(A)$ , et du fait que les fonctions symétriques en  $a_i$  et  $a_{i+1}$  sont des scalaires pour  $\partial_i$ .

Par exemple, pour  $\mathfrak{S}(\{a, b, c\})$ , on obtient successivement

$$\begin{aligned} (a-b)\partial_1 &= a\partial_1 - b\partial_1 + \partial_1(b-a) = 1 + \sigma_1 \\ (a-b)(a-c)(b-c)\partial_1 &= (1 + \sigma_1)(a-c)(b-c) \\ (a-b)(a-c)(b-c)\partial_1\partial_2 &= (1 + \sigma_1)(a-c)(1 + \sigma_2) \\ &\quad + (1 + \sigma_1)(a\partial_2 - c\partial_2)(c-b) + (1 + \sigma_1)\partial_2 \\ &= (1 + \sigma_1)(a-c) + (1 + \sigma_1)\sigma_2(a-b) \quad . \end{aligned}$$

Ce dernier calcul donne en fait l'expression de  $\Delta\partial_\mu$  en fonction des sous-mots d'une décomposition réduite de  $\mu$ , et coïncide avec l'algorithme de Arabia et Kostant-Kumar mentionné plus haut.

Les résultats de ce paragraphe peuvent aussi s'écrire à l'aide du produit scalaire :  $\forall P, Q \in \mathcal{R}(A)$ ,  $(P, Q) := PQ\partial_\omega$  pour lequel la base des polynômes de Schubert est auto-adjointe [La-Sch 1], [Ko-Ku 1].

#### 4. Polynômes de Grothendieck

L'anneau de Grothendieck de la variété de drapeaux fait intervenir de manière naturelle les opérateurs  $\pi_\mu$  et  $\psi_\mu$  ([Dem 3] note  $\Lambda_\mu^0$  pour  $\pi_\mu$ ; [Dem 1] emploie l'opérateur conjugué de  $\psi_\mu$  par  $\omega$ , qu'il note  $L_\mu$ ). Le corollaire 2.11 donne le développement de ces opérateurs dans la base canonique  $\{\zeta\}$  :

$$(4.1) \quad R_\zeta(\pi_\mu) = \mathbb{X} \pi_\mu \zeta^{-1} \omega \theta \omega \zeta / \Delta^\zeta \quad .$$

Il se trouve que ce sont d'autres polynômes que les  $\mathbb{X} \pi_\mu$  qui interviennent en K-théorie [La-Sch 2], [Las 2] :

*Définition (4.2)* . — Le polynôme de Grothendieck d'indice  $\mu$  est  $G_\mu = \prod_{i+j \leq n+1} (1 - y_i/a_j) \pi_{\omega\mu} = \frac{\mathbb{X}}{\rho} \pi_{\omega\mu}$ .

Les polynômes de Grothendieck sont des polynômes en les  $\{1/a_i\}$  et  $\{y_j\}$ ; en fait,  $G_\omega = \prod_{i+j \leq n+1} (1 - y_i/a_j) = X/\rho$  et l'on peut éviter de recourir aux inverses en remarquant que les  $\rho G_\mu$  sont des polynômes en les  $\{a_i\}$  et  $\{y_j\}$ .

Les polynômes de Grothendieck, tout comme les polynômes de Schubert, sont des généralisations des *fonctions de Schur*. Inversement, les *multifonctions de Schur* permettent de donner des expressions condensées de ces polynômes.

**Définition (4.3)** . — Soient  $A$  et  $Y$  deux alphabets finis. Les *fonctions symétriques complètes*  $S_j(A - Y)$  sont les coefficients de la série génératrice

$$\frac{\prod_{y \in Y} (1 - \xi y)}{\prod_{a \in A} (1 - \xi a)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \xi^j S_j(A - Y) \quad ,$$

où  $\xi$  est une indéterminée supplémentaire.

**Définition (4.4)** . — Soient  $r$  un entier,  $H = (h_1, \dots, h_r)$  un  $r$ -uplet d'entiers rationnels,  $A^1, \dots, A^r, Y^1, \dots, Y^r$  des alphabets finis. Alors, la *(multi-)fonction de Schur*  $S_H(A^1 - Y^1, \dots, A^r - Y^r)$  est la valeur du déterminant

$$|S_{h_j + j - i}(A^j - Y^j)|_{1 \leq i, j \leq r} \quad .$$

Dans le cas de  $S(\{a_1, \dots, a_4\})$ , notons en outre  $(ijh \nmid mnp)$  la fonction  $(a_1 a_2 a_3)^{-3} S_{333}(A_i - Y_m, A_j - Y_n, A_h - Y_p)$ , où, pour tout  $k$ ,  $A_k$  est l'alphabet des  $k$ -premières lettres de  $A$  :  $A_k = \{a_1, \dots, a_k\}$ , mutatis mutandis pour  $Y$ . Alors

$$G_{4321} = (321 \nmid 123)$$

$$G_{3421} = (321 \nmid 122); G_{4231} = (321 \nmid 113); G_{4312} = (321 \nmid 023) \quad .$$

$$G_{2431} = (322 \nmid 113); G_{3241} = (321 \nmid 112); G_{3412} = (321 \nmid 022); G_{4132} = (331 \nmid 023); G_{4213} = (321 \nmid 013) \quad .$$

$$G_{1432} = (332 \nmid 023); G_{2341} = (321 \nmid 111); G_{2413} = (322 \nmid 013); G_{3142} = (331 \nmid 022); G_{4123} = (321 \nmid 003); G_{3214} = (321 \nmid 012) \quad .$$

$$G_{1342} = (332 \nmid 022); G_{1423} = (322 \nmid 003); G_{2143} = G_{2134} \cdot G_{1243}; G_{2314} = (321 \nmid 011); G_{3124} = (321 \nmid 002) \quad .$$

$$G_{1243} = (333 \nmid 003); G_{1324} = (322 \nmid 002); G_{2134} = (321 \nmid 001) \quad .$$

$$G_{1234} = (321 \nmid 000) = 1 \quad .$$

On remarquera que, mis à part  $G_{2143}$ , les polynômes de Grothendieck s'expriment à l'aide d'une seule fonction de Schur. Pour un groupe  $\mathfrak{S}(A)$  quelconque, les permutations  $\mu$  telles que  $G_\mu$  ou  $X_\mu$  soient égaux à une fonction

de Schur sont dites *vetillaires* (cf. [La-Sch 2] pour la définition et [La-Sch 1] pour les différentes caractérisations de ces permutations) .

Le lemme 2.11 permet de décomposer les  $\frac{1}{\rho}\pi_\mu$  dans la base  $\{\zeta\}$  :

$$(4.5) \quad R_\zeta\left(\frac{1}{\rho}\pi_\mu\right) = G_{\omega\mu} \zeta^{-1}\omega \theta \omega \zeta / \Delta^\zeta \quad ,$$

d'où, à l'aide du lemme 2.12 :

$$(4.6) \quad R_\zeta(\pi_\mu) = G_{\omega\mu} \zeta^{-1}\omega \theta \omega \zeta \rho^\zeta / \Delta^\zeta \quad .$$

En d'autres termes, le développement de  $\pi_\mu$  dans la base canonique  $\{\zeta\}$  est fourni par les spécialisations des polynômes de Grothendieck ( par le morphisme  $\zeta^{-1}\omega\theta\omega\zeta : y_1 \rightarrow a_1\zeta, \dots, y_{n+1} \rightarrow a_{n+1}\zeta$  ) .

Ainsi le polynôme de Grothendieck  $G_{321\pi_1\pi_2} = G_{213} = (1 - x/a)$  a comme spécialisations non nulles  $G_{213}\omega\theta\omega = 1 - c/a = G_{213}\sigma_1\omega\theta\omega\sigma_1$  et  $G_{213}\sigma_2\omega\theta\omega\sigma_2 = 1 - b/a = G_{213}\sigma_2\sigma_1\omega\theta\omega\sigma_1\sigma_2$ , ce qui entraîne d'après 4.6 le développement

$$\begin{aligned} \pi_1\pi_2 = & \frac{ab}{(a-b)(a-c)} - \sigma_1 \frac{b^2}{(a-b)(b-c)} \\ & - \sigma_2 \frac{ac}{(a-c)(b-c)} + \sigma_1\sigma_2 \frac{c^2}{(a-c)(b-c)} \quad . \end{aligned}$$

Les  $R_\zeta(\pi_\mu)$  sont notés  $b_{\mu,\zeta}$  par [Kum] et par [Ko-Ku 2] .

La définition des opérateurs  $\pi_\mu$  et  $\psi_\mu$  peut s'étendre à la K-théorie équivariante des variétés de drapeaux, et même des algèbres de Kac-Moody ( [Ko-Ku 2]; [Kum] ). Brion nous a fait remarquer que le principe de localisation s'étend à la K-théorie; en d'autres termes, le morphisme qui associe à la variété de Schubert d'indice  $\mu$  l'élément  $\frac{\Delta}{\rho}\pi_\mu$  est l'injection naturelle de la K-théorie T-équivariante de la variété de drapeaux dans  $\mathcal{E}$  [Kum , th 2.2].

Tenant compte du facteur  $\frac{\Delta}{\rho}$ , on obtient à partir de (4.1) le développement de ces opérateurs dans la base  $\{\zeta\}$  :

$$(4.7) \quad R_\zeta\left(\frac{\Delta}{\rho}\pi_\mu\right) = G_{\omega\mu} \zeta^{-1}\omega\theta\omega\zeta \quad .$$

Les images des variétés de Schubert dans  $\mathcal{E}$  ont donc pour composantes (dans la base  $\{\zeta\}$  ) les spécialisations des polynômes de Grothendieck par le morphisme  $y_1 \rightarrow a_1\omega\zeta, \dots, y_{n+1} \rightarrow a_{n+1}\omega\zeta$  .

On peut noter que la spécialisation  $y_1 \rightarrow 1, \dots, y_{n+1} \rightarrow 1$  du polynôme de Grothendieck  $G_\mu$  est la classe du *faisceau structural* de la variété de Schubert

d'indice  $\mu$  ([Dem 1], [Las 2], [La-Sch 2]), les indéterminées  $a_1, \dots, a_{n+1}$  devant s'interpréter comme les classes respectives des fibrés inversibles, dits tautologiques, de la variété de drapeaux.

On peut retrouver les cycles de Schubert à partir des classes des faisceaux structuraux, à l'aide du changement de variables  $1 - 1/a_i = \beta_i$ . Soient  $\partial_\mu^\beta$  les différences divisées associées à l'alphabet  $B = \{\beta_1, \dots, \beta_{n+1}\}$ . Il est facile de vérifier que

$$(4.8) \quad \pi_i = (1 - \beta_{i+1}) \partial_i^\beta \quad .$$

Ainsi donc l'image de  $(1 - 1/a_1)^n \cdots (1 - 1/a_{n+1})^0 = \beta_1^n \cdots \beta_{n+1}^0$  par  $\pi_\mu$  a pour terme de plus bas degré en  $B$  le polynôme  $\beta_1^n \cdots \beta_{n+1}^0 \partial_\mu^\beta$ , c'est-à-dire le cycle de Schubert d'indice  $\omega\mu$ . Ce résultat s'obtient classiquement en prenant le terme de degré minimum du polynôme de Grothendieck en les variables  $e^\alpha = 1 + \alpha + \cdots$ . Cependant la formule 4.8 permet d'obtenir l'expression exacte des polynômes de Grothendieck en fonction des polynômes de Schubert, et pas seulement leur terme dominant.

On sait par ailleurs [Las 2] que  $\psi_\mu = \sum_{\nu \leq \mu} (-1)^{\ell(\nu)} \pi_\nu$ , où l'inégalité est relative à l'ordre d'Ehresmann. Réciproquement,  $\pi_\mu = \sum_{\nu \leq \mu} \psi_\nu$ ; on pourrait aisément retrouver ces deux égalités à l'aide des formules de décomposition dans les bases  $\{\pi_\mu\}$  ou  $\{\psi_\mu\}$  données ci-dessous. Comme corollaire, on a que la fonction de Möbius du groupe symétrique (pour l'ordre d'Ehresmann) prend ses valeurs dans  $\{+1, -1\}$  suivant la longueur [Ver] .

Le développement de  $\psi_\mu$  provient donc de celui des  $\pi_\nu$  :

$$(4.9) \quad R_\zeta(\psi_\mu) = \sum_{\nu \leq \mu} (-1)^{\ell(\nu)} G_{\omega\nu} \zeta^{-1} \omega \theta \omega \zeta \rho^\zeta / \Delta^\zeta \quad .$$

On a en fait une identité plus compacte, à l'aide de l'involution suivante permettant d'échanger les opérateurs  $\pi$  et  $\psi$  (il suffit de prouver (4.10) pour une transposition simple [Las 2]) :

$$(4.10) \quad \omega \frac{1}{\rho} \pi_\mu \rho \omega = (-1)^{\ell(\mu)} \psi_{\omega\mu\omega} \quad .$$

Rassemblant 4.6 et 4.10, on obtient ainsi :

$$(4.11) \quad R_\zeta(\psi_\mu) = (-1)^{\ell(\mu)} G_{\mu\omega} \omega \zeta^{-1} \theta \zeta \omega \frac{\rho}{\Delta^\zeta} \omega \quad .$$

Inversement, le développement des éléments de  $\mathcal{E}$  en fonction des  $\pi_\mu$  ou  $\psi_\mu$  est donné par les deux lemmes, corollaires de 2.10.

LEMME 4.12 . — Soit  $D = \sum_{\mu} P_{\mu}(D) \pi_{\mu}$  , avec  $P_{\mu} \in \mathcal{R}(A)$  , un élément de  $\mathcal{E}$  . Alors  $\mu \neq \omega \Rightarrow P_{\mu}(D) = G_{\omega} D \psi_{\mu^{-1}\omega} \theta \omega$  et  $P_{\omega}(D) = G_{\omega} D \theta \omega$ .

Ainsi, pour  $D = \psi_1 \psi_2 = (\pi_1 - 1)(\pi_2 - 1)$  , on trouve  $G_{321} D = G_{213} - G_{231} - G_{312} + G_{321}$  , d'où  $G_{321} D \pi_1 = G_{123} - G_{132}$  et  $G_{321} D \pi_2 = 0 = G_{321} D \pi_1 \pi_2$  , ce qui donne bien  $\psi_1 \psi_2 = \pi_1 \pi_2 - \pi_1 - \pi_2 + 1$  .

Les  $P_{\mu}(\zeta)$  sont notés  $e^{\mu, \zeta}$  par [Ko-Ku 2] .

Similairement, le développement dans la base des  $\{\psi_{\mu}\} \cup \{1\}$  est :

LEMME 4.13 . — Soit  $D = \sum_{\mu, \mu \neq id} \check{P}_{\mu}(D) \psi_{\mu} + \check{P}_{id} 1$  , avec  $\check{P}_{\mu} \in \mathcal{R}(A)$  , un élément de  $\mathcal{E}$  . Alors  $\check{P}_{\mu}(D) = G_{\omega} D \pi_{\mu^{-1}\omega} \theta \omega$  et  $\check{P}_{id}(D) = G_{\omega} D \pi_{\omega} \theta \omega$  .

Par exemple, soit  $D = \partial_2 \partial_1$ . Alors  $G_{321} D = (1 - x/b)(1 - x/a)(1 - y/a) \partial_2 \partial_1 = (1 - x/b) \partial_2 (1 - x/a)(1 - y/a) \partial_1 = (x/bc)(1 - x/a)(1 - y/a) \partial_1 = (x/abc)(1 - xy/ab)$ . On a donc  $G_{321} D = G_{321} D \pi_2$  et  $G_{321} D \pi_1 = G_{321} D \pi_2 \pi_1 = G_{321} D \pi_1 \pi_2 = G_{321} D \pi_1 \pi_2 \pi_1 = x/abc$  , d'où en prenant l'image de ces fonctions par  $\theta \omega$ , le développement :

$$\partial_2 \partial_1 = \left(\frac{1}{ab}\right)(\psi_2 \psi_1 + \psi_1 + \psi_2 + 1) \quad .$$

Les résultats de cette section peuvent aussi s'obtenir à l'aide du produit scalaire sur  $\mathcal{R}(A)$  :  $\forall P, Q \in \mathcal{R}(A)$ ,  $\langle P, Q \rangle := PQ \pi_{\omega}$  ; en effet, la base des polynômes de Grothendieck et sa base adjointe sont échangées par une involution élémentaire [Las 2], ce qui permet de décomposer explicitement les éléments de  $\mathcal{R}(A)$  dans chacune de ces deux bases.

Outre de nombreuses remarques destinées à améliorer l'exposition, le rapporteur a bien voulu apporter les précisions géométriques suivantes :

Il existe une nuance conceptuelle très importante concernant la définition des opérateurs agissant sur les différents groupes de cohomologie  $H^*(X)$  de la variété de drapeaux  $X$  . Dans [B-G-G], les  $A_i$  sont définis *a priori* sur l'algèbre  $S(\mathfrak{h}^*)$  et l'existence des généralisations  $A_{\mu}$  n'est acquise que par le biais de toute la combinatoire liée à l'ordre de Bruhat sur le groupe de Weyl. Il s'agit donc bien, au départ, d'objets algébriques. Postérieurement, [B-G-G] fait intervenir le résultat de Borel qui démontre que le morphisme caractéristique (de Chern-Weil)  $\alpha : S(\mathfrak{h}^*) \rightarrow H^*(X)$  est surjectif et de noyau l'idéal  $\mathcal{I}$  engendré par les polynômes symétriques non constants, et après avoir signalé que les  $A_{\mu}$  laissent stables  $\mathcal{I}$ , ils les font opérer “naturellement” sur la cohomologie de  $X$ . Je rappelle en passant, que ces opérateurs cohomologiques sont notés, en fait,  $\bar{A}_{\mu}$ . Le principal résultat de [B-G-G] est l'égalité, bien connue depuis lors,

$$\langle X_{\mu} , \alpha(P) \rangle = A_{\mu}(P)(0) ,$$

pour tout  $P \in S(\mathfrak{h}^*)$ . Il est entendu que la démonstration utilise des techniques cohomologiques et géométriques, mais celles-ci n'apparaissent pas dans la conception des  $A_\mu$ . On peut donc affirmer que si leur action cohomologique est naturelle, elle n'est pas moins "*a posteriori*".

Il y a eu par la suite de nombreux essais de généralisation de ce travail dans diverses directions et, plus précisément pour les variétés de drapeaux associées aux groupes de Kač-Moody, celui de Kostant-Kumar [Ko-Ku1] est assez satisfaisant. Mais là aussi ces opérateurs, notés  $x_\mu$  maintenant, sont introduits dans un contexte purement algébrique et agissent toujours *a posteriori* sur la cohomologie de  $X$ . Il en est de même dans les articles de Demazure cités.

Dans tous ces travaux, on peut, donc, justement considérer que les  $A_\mu$  sont des objets essentiellement algébro-combinatoires. La vraie définition *a priori* cohomologique apparaît chez M.Demazure (non publié, mais voir Marlin dans le cas géométrique, non-équivariant et en dimension finie, et Arabia dans le cas topologique, équivariant et de Kač-Moody) et V.Kač (en collaboration avec D.Peterson et dans le cas topologique, non-équivariant et de Kač-Moody; malheureusement, l'article donné en référence "*Cohomology of infinite-dimensional groups and their flag varieties*" n'a jamais été publié à ma connaissance), mais avec une nuance non négligeable qui favorise le premier : si tous les deux définissent  $A_i$  par la composée  $\pi_i^* \pi_{i*}$  pour la projection canonique  $\pi_i$  de  $G/B$  sur  $G/P_i$ , seul le premier a réussi à définir  $A_\mu$  en cohomologie et pour tout  $\mu$ , sans avoir recours à la combinatoire des groupes de Coxeter ! En effet, soit  $T_\mu$  l'adhérence de la  $G$ -orbite du point  $(e, \mu)$  dans la variété  $X \times X$  sur  $X$  et notons  $p_i$  les restrictions à  $T_\mu$  des projections canoniques de  $X \times X$  sur  $X$ , on a alors  $A_\mu = p_{1*} p_2^*$  (confer [Ara3]). Il apparaît ainsi que parmi les différentes manières d'introduire les opérateurs en question, il en existe une, issue des travaux de Demazure, qui est vraiment intrinsèque au contexte cohomologique.

Par ailleurs, l'explicitation des coefficients  $R_\zeta(\Delta \partial_\mu)$  par A.Arabia est donnée à partir d'une "désingularisation" des variétés de Schubert ce qui fait que ses calculs ne sont vraiment intrinsèques que dans le cas lisse (p.e. si  $\mu$  est le produit de réflexions simples deux-à-deux distinctes ou pour l'élément du groupe de Weyl de plus grande longueur en dimension finie), mais alors l'interprétation de ces fonctions rationnelles en cohomologie équivariante résulte de l'étude faite dans Atiyah-Bott (*The Moment Map and Equivariant Cohomology*, Topology **23** (1984) 1-28), et même sûrement avant, où ces coefficients ont été identifiés comme étant les analogues équivariants des classes d'Euler des sous-variétés de points fixes, résultat redécouvert par Berline-Vergne (*Fourier transforms of orbits of the coadjoint representation*, Proceedings of the conference on "Representation of reductive groups", Park City, Utah, 1982) dans le contexte de la géométrie différentielle et lorsque les points fixes sont isolés. Un regard attentif montre que la seule justification que l'on puisse fournir du fait que ces invariants sont de nature cohomologique, dans les cas singuliers et à partir des travaux de Arabia, provient exclusivement de l'isomorphisme d'Atiyah-Segal,

mais ceci était connu bien avant lui.

En fait, ce qu'il faudrait dire, c'est que les travaux de Berline-Vergne [Be-Ve], Arabia [Ara2,3] et Kostant-Kumar [Ko-Ku2], dans cet ordre chronologique-là, ont très fortement suggéré que les coefficients  $R_\zeta(\Delta\partial_\mu)$  devaient, dans tous les cas, aussi bien régulier que singulier, s'interpréter comme des invariants géométriques, voire topologique, et qu'une définition intrinsèque devait exister. C'est cette idée qui est à la base de la théorie développée par Rossmann qui donne une définition des *multiplicités équivariantes* dans le contexte de la géométrie algébrique.

## REFERENCES

- [Ara 1] A. ARABIA , Cycles de Schubert et Cohomologie  $K$ -équivariante de  $K/T$ , *Thèse, Université Paris 7* (1985).
- [Ara 2] A. ARABIA , Cohomologie T-équivariante de  $G/B$  pour un groupe  $G$  de Kac-Moody, *Inv. Math.* **85** (1986) 39-52.
- [Ara 3] A. ARABIA , Cohomologie T-équivariante de la variété de drapeaux d'un groupe de Kac-Moody, *preprint* (1986).
- [Be-Ve] N. BERLINE & M. VERGNE , Zéros d'un champ de vecteurs et classes caractéristiques équivariantes, *Duke Math.* **50** (1983) 539-549.
- [B-G-G] I.N. BERNSTEIN, I.M. GELFAND, S.I. GELFAND Schubert cells and cohomology of the spaces  $G/P$ , *Uspekhi. Mat. Nauk*, **28** (1973) 3-26.
- [Bou] N. BOURBAKI , Algèbre, Hermann, Paris.
- [Dem 1] M. DEMAZURE, Désingularisation des variétés de Schubert, *Annales E.N.S.* **6** (1974) 163-172 .
- [Dem 2] M. DEMAZURE, Une formule des caractères, *Bull. Sc. Math.* **98** (1974) 163-172 .
- [Dem 3] M. DEMAZURE Invariants symétriques entiers des groupes de Weyl et torsion, *Inventiones* **21** (1973) 287-301.
- [Gut] E. GUTKIN , Operator calculi associated with reflection groups ; Reflection groups, generalized BGG calculus *preprints* (1986) .
- [Kac] V. KAC , Torsion in cohomology of compact Lie groups and Chow rings of reductive algebraic groups, *Inventiones* **80** (1985) 69-79.
- [Ko-Ku 1] B. KOSTANT, S. KUMAR , The Nil Hecke ring and Cohomology of  $G/P$  for a Kac-Moody group  $G$ , *Advances in Math.* **62** (1986) 187-237.
- [Ko-Ku 2] B. KOSTANT, S. KUMAR , T-equivariant K-theory of generalized flag varieties, *preprint* (1988) .
- [Kr-Pr] W. KRASKIEWICZ, P. PRAGACZ , Foncteurs de Schubert, *C.R. Acad. Sc. Paris* **304** (1987) 209-212 .

- [Kum] S.KUMAR , A connection of equivariant K-theory with the singularity of Schubert varieties, *preprint* (1988) .
- [Las 1] A.LASCOUX, Classes de Chern des variétés de drapeaux, *C.R. Acad. Sc. Paris* **295** (1982) 393-398 .
- [Las 2] A.LASCOUX, Anneau de Grothendieck de la variété de drapeaux, à paraître dans un volume en l'honneur de Grothendieck .
- [La-Sch 1] A.LASCOUX & M.P.SCHÜTZENBERGER, Polynômes de Schubert, *Comptes Rendus* **294** 51982) 447.
- [La-Sch 2] A.LASCOUX & M.P.SCHÜTZENBERGER, , Structure de Hopf..., *Comptes Rendus* **295** (1982) 629.
- [La-Sch 3] A.LASCOUX & M.P.SCHÜTZENBERGER, Symmetry and Flag manifolds, in *Invariant Theory, Springer L.N.* **996** (1983) 118-144.
- [La-Sch 4] A.LASCOUX & M.P.SCHÜTZENBERGER, Interpolation de Newton à plusieurs variables, *Séminaire d'Algèbre M.P.Malliavin 1983-84, Springer L.N.* **1146** (1985) 161-175.
- [La-Sch 5] A.LASCOUX & M.P.SCHÜTZENBERGER, Symmetrization operators on polynomial rings, *Funk.Anal.***21** (1987) 77-78.
- [La-Sch 6] A.LASCOUX & M.P.SCHÜTZENBERGER, Keys and Standard Bases, in *Combinatorics at Minneapolis 1988* , à paraître aux L.N. Springer.
- [La-Sch 7] A.LASCOUX & M.P.SCHÜTZENBERGER, Tableaux and non commutative Schubert Polynomials, à paraître dans *Funk.Anal.* (1989).
- [Mac] I.G.MACDONALD Symmetric Functions and Hall Polynomials, *Oxford Math.Mono*, Oxford Un. Press (1979).
- [Ros] W.ROSSMANN , Equivariant multiplicities on complex varieties, *prépublication* (1987).
- [Ver] D.N.VERMA Moebius inversion for the Bruhat ordering on a Weyl group , *Annales E.N.S.* **4** (1971) 393-398 .