

astérisque

87-88

1991

**tableaux de Young et foncteurs de Schur
en algèbre et géométrie**

**tablice Younga i funktory Schura
w algebrze i geometrii**

**Young tableaux and Schur functors
in algebra and geometry**

TORUŃ, POLOGNE, 1991

société mathématique de France

POLYNÔMES DE KAZHDAN & LUSZTIG
POUR LES GRASSMANNIENNES

☆☆☆☆☆☆

Alain Lascoux et Marcel-Paul Schützenberger

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

1. Introduction.

Kazhdan et Lusztig ont défini, pour tout groupe de Coxeter fini, des polynômes $P_v^w(q)$ indexés par les paires d'éléments (v, w) du groupe. Ces polynômes, que nous appellerons Polynômes de K&L sont fondamentaux et trouvent maintes applications :

- leur terme dominant détermine un graphe qui fournit la représentation régulière du groupe (cf. [K&L 1])
- les valeurs pour $q = 1$ de ces polynômes sont les multiplicités des modules de Verma (cf. [Brylinski])
- dans le cas du groupe symétrique, les coefficients des polynômes de K&L sont les dimensions des espaces de cohomologie singulière des variétés de Schubert : c'est la première description numérique des singularités de ces variétés (cf. [K&L2])
- plus généralement, on définit de même des polynômes de K&L pour les groupes de Weyl affines (cf. [Lusztig]). Parmi ceux-ci, on trouve les polynômes de Foulkes-Green que nous avons étudiés par ailleurs (cf. [Macdonald], [Schützenberger]) ; ils sont associés aux représentations complexes des groupes linéaires finis ; ce sont aussi les multiplicités des représentations du groupe symétrique sur la cohomologie de certaines sous-variétés de la variété drapeau (cf. [De Concini&Procesi], résolvant la conjecture de [Kraft]), ainsi que les caractéristiques d'Euler-Poincaré des modules inversibles sur les variétés drapeaux (cf. [Lascoux 2]) .

Ayant prouvé l'existence des polynômes dans [K&L1] , Kazhdan et Lusztig montrent par une voie détournée la non-négativité de leurs coefficients pour le groupe symétrique dans [K&L2] . Ce n'est pas la seule propriété remarquable de ces polynômes qui forment une famille très spéciale. Par exemple, en degré 0 et 1, les seuls polynômes possibles sont 0, 1, $1+q$, $1+2q$, les seuls polynômes de liaison (cf. plus bas ; ce sont ceux de degré maximum, qui donnent les représentations du groupe symétrique) sont en degré 2 , les polynômes $1+q^2$, $1+q+q^2$, $1+2q+q^2$, $1+3q+q^2$, $1+4q+q^2$. Nous conjecturons d'ailleurs que, pour un degré d quelconque, ces polynômes de liaison sont bornés supérieurement par le polynôme eulérien de degré d , et qu'il n'y a qu'un nombre fini de polynômes de K&L de degré donné (pour le groupe symétrique).

Le présent travail est consacré au cas grassmannien, pour lequel nous donnons une formulation explicite des polynômes de K&L reposant sur des objets combinatoires qui livrent du même coup les représentations associées. Le cas grassmannien présente certaines particularités notables qui ne se retrouvent pas dans le cas général, sur lequel nous reviendrons dans un autre article.

Au §2, à la suite de K&L, nous rappelons comment un graphe peut coder une représentation du groupe symétrique.

Aux §3,4,5, nous examinons un sous-graphe du graphe complet, et montrons dans ce cas, indépendamment des polynômes de K&L, que le monoïde cycliste fournit l'existence des représentations.

Au §6, nous définissons des polynômes d'emboîtement de manière purement combinatoire.

Au §7, nous vérifions que les polynômes d'emboîtement sont bien les polynômes de K&L.

Aux §8,9,10, nous donnons quelques propriétés de ces polynômes qui ne découlent de façon immédiate ni de leur définition dans [K&L1], ni de leur interprétation cohomologique dans [K&L2].

Le §11 précise les implications géométriques pour les grassmanniennes des résultats précédents.

2. Représentation associée à un graphe.

Chacune des représentations précédemment connues du groupe symétrique présente des inconvénients : la représentation "régulière" (i.e. l'algèbre du groupe) contient toutes les représentations complexes, mais avec multiplicité et les idempotents dans cette algèbre sont des sommes de permutations qu'il devient vite impossible de développer, sans ou avec ordinateur. On peut facilement décomposer ou multiplier les "modules de Specht", mais l'action du groupe symétrique sur ces espaces n'a pas d'expression matricielle simple : il faut faire appel à la "straightening formula" de Garnir, qui malgré les développements du Professeur Rota, reste d'un maniement malaisé. Dans la représentation semi-normale de Young, les matrices des générateurs du groupe symétrique sont au contraire très simples (la construction est de fait réduite à S_2), s'étendent à l'algèbre de Hecke ("q-analogue"), mais ne sont pas à coefficients entiers, et le pourquoi du succès de cette construction n'est en rien justifié par la théorie.

La représentation de Kazhdan et Lusztig offre (presque) tous les avantages, une fois rendue explicite :

les matrices représentant les générateurs du groupe symétrique sont très simples, ne comportant que des 0, 1 et -1, et codées simultanément par un seul graphe ; la restriction aux sous-groupes de Schur est triviale, de même que l'extension à l'algèbre de Hecke.

POLYNÔMES DE KAZHDAN ET LUSZTIG

Décrivons rapidement la représentation de K&L, et montrons tout d'abord comment un graphe peut coder des matrices.

Soit n un entier. Soit W une famille de permutations appartenant à S_n et μ une application symétrique : $\mu: W \times W \rightarrow \mathbb{Z}$. On étiquette chaque $w \in W$ par l'ensemble des lettres i telles que $(i+1 \ i)$ soit un sous-mot de w , c'est-à-dire telles que $i+1$ soit à gauche de i dans w .

C'est la donnée d'une telle famille étiquetée que K&L appellent "graphe", $\mu(v,w)$ étant la multiplicité de l'arête (v,w) .

A un graphe de K&L sont associés $n-1$ opérateurs T_i comme suit : soit E le $\mathbb{Z}$ -module libre de base e_w , $w \in W$. Alors pour $i : 1 \leq i \leq n-1$, on définit $T_i \in \text{End}(E)$ par

$$\begin{cases} T_i(e_w) = -e_w & \text{si } w \text{ a l'étiquette } i \\ T_i(e_w) = e_w + \sum \mu(v,w) e_v & \left| \begin{array}{l} \text{si } w \text{ n'a pas l'étiquette } i \\ \text{somme sur tous les } v \text{ qui ont l'étiquette } i \end{array} \right. \end{cases}$$

Définition. Le graphe représente le groupe symétrique si $\tau_i \rightarrow T_i$ est une représentation (où les τ_i , $1 \leq i \leq n-1$, sont les générateurs de Coxeter du groupe symétrique).

En d'autres termes, il suffit de vérifier les relations de commutation de Coxeter pour les T_i : $T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1}$ et $T_i T_j = T_j T_i$ si i, j ne sont pas consécutifs (les relations $T_i T_i = \text{identité}$ découlent de la construction).

Théorème (K&L). Il existe des polynômes $P_w^V(q)$ indexés par toutes les paires d'éléments de S_n , tels que le graphe ayant pour sommets les éléments de S_n , pour multiplicité d'arête $\mu(v,w)$, $v \leq w$, le coefficient du terme $q^{(lg w - lg v - 1)/2}$ dans $P_w^V(q)$, représente le groupe symétrique S_n ; de plus toute représentation irréductible (en caractéristique 0) peut s'obtenir par restriction à un sous-ensemble de sommets.

Il a été conjecturé par K&L que la multiplicité μ est 0 ou 1 (c'est-à-dire que la construction est purement ensembliste).

Cette propriété découle dans le cas grassmannien de l'interprétation combinatoire donnée au §6.

Dans le cas général, il est d'ailleurs possible de construire directement un graphe de représentation (ensembliste) à partir du monoïde plaxique, indépendamment du calcul des polynômes de K&L ; ces derniers n'interviennent alors que pour vérifier l'identité de cet objet avec le graphe de K&L.

Dans tout ce qui suit, nous ne traitons plus que du cas grassmannien, qu'il nous reste à définir.

3. Graphe grassmannien.

Soit $n = n' + n''$ des entiers, $W_{n', n''}$ l'ensemble des mots de degrés respectifs n' et n'' en a et β .

On étiquette les mots de $W_{n', n''}$ par :

★ w a l'étiquette i ssi w a pour facteur $a\beta$ aux places $i, i+1$.

A toute paire de mots (v, w) de même degré, on associe une paire réduite $(v^{\text{red}}, w^{\text{red}})$ en effaçant successivement les facteurs $a\beta$ qui sont à la même place dans les deux mots. Par exemple, $\beta a a \beta \beta a$ donne par réduction $\beta a \dots \beta a$ et finalement $\beta \dots \beta$.
 $a a a \beta \beta \beta$ donne par réduction $a a \dots \beta \beta$ et finalement $a \dots \beta$.

On pose alors $\mu(v, w) = \mu(w, v) = 1$ et l'on dit que v et w sont liés si et seulement si $w^{\text{red}} = w' \beta a w''$, $v^{\text{red}} = w' a \beta w''$, c'est-à-dire si et seulement si w^{red} et v^{red} diffèrent par le changement d'un facteur $a\beta$ en βa . On pose en outre $\mu(v, w) = 0$ dans les autres cas.

Pour montrer que le graphe ainsi défini représente le groupe symétrique, nous avons besoin de quelques généralités sur le monoïde plaxique à deux lettres.

Remarquons, pour faire le lien avec le §2, que tout mot de $W_{n', n''}$ peut être considéré comme une permutation (que nous dirons grassmannienne), en numérotant les a de droite à gauche par $1, 2, \dots, n'$, puis les β par $n'+1, \dots, n'+n''$. L'étiquetage que nous choisissons ici est l'inverse de celui du §2.

4. Monoïde cycliste

On sait depuis longtemps munir $N \times N$ d'une structure de monoïde (monoïde des parenthèses de Łukasiewicz) : c'est le cas particulier du monoïde plaxique (cf. [Las-coux-Schützenberger]) lorsque l'alphabet est réduit à deux lettres.

Définition. Le monoïde cycliste est le quotient du monoïde libre $\{a, \beta\}^*$ par les relations $a a \beta \sim a \beta a$ et $\beta a \beta \sim a \beta \beta$.

Sur l'interprétation graphique donnée ci-après, on voit aisément :

Lemme. Le centre (i.e. l'ensemble des mots v tels que $\forall w \in \{a, \beta\}^*$, alors $vw \sim wv$) est l'ensemble des mots équivalents à une puissance de $a\beta$. C'est le plus petit sous-monoïde qui, contenant w , contient aussi $a w \beta$.

Il n'est guère difficile de vérifier la

Proposition. Soient $v, w \in \{a, \beta\}^*$ deux mots de mêmes degrés respectifs en a, β . Alors v et w sont liés (au sens du §3) si et seulement si il existe un mot e du centre tel que $w = w_1 a e \beta w_2$ et $v = w_1 \beta e a w_2$.

Interprétation graphique. Si l'on représente un mot par un chemin dans $Z \times Z$, a étant le segment $(m, n) \rightarrow (m+1, n-1)$ et β le segment $(m, n) \rightarrow (m+1, n+1)$, alors un mot est dans le centre si et seulement si les points terminaux sont sur la même horizontale et si le chemin ne traverse pas cette dernière.

5. Le graphe grassmannien représente le groupe symétrique.

Comme nous l'avons déjà dit au §2, il suffit de vérifier les relations de Coxeter pour les opérateurs T_i , c'est-à-dire :

$$5.1 \quad T_i^2 = \text{identité}$$

$$5.2 \quad T_i T_j = T_j T_i \text{ pour des orbites disjointes}$$

$$5.3 \quad T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1}$$

La propriété 5.1 est automatique pour des opérateurs associés à un graphe ; il en est de même de la relation 5.3 pour le cas grassmannien auquel nous nous limitons ici.

En raison du fait qu'une liaison est une transposition de deux lettres, et donc que l'on n'a qu'un nombre fini de cas à considérer pour la composition de deux liaisons, on peut montrer une propriété plus forte que 5.2 :

Disons qu'un triple (ordonné) de mots : (w_1, w_2, w_3) est un (i,j) -triple si et seulement si (w_1, w_2) et (w_2, w_3) sont des arêtes du graphe grassmannien, et si

$$\begin{cases} w_1 \text{ a les étiquettes } i \text{ et } j \\ w_2 \text{ a l'étiquette } i \text{ et pas } j \\ w_3 \text{ n'a ni } i \text{ ni } j . \end{cases}$$

Alors, on a la proposition suivante :

Proposition. Soit (w_1, w_2, w_3) un (i,j) -triple. Alors il n'existe pas de mot w tel que (w_1, w, w_3) soit un autre (i,j) -triple, et il existe un seul w tel que (w_1, w, w_3) soit un (j,i) -triple.

La proposition est en fait équivalente à la relation 5.2, plus le fait que la matrice représentant $T_i T_j$ ne comporte que des 0, 1 ou -1 .

6. Polynômes d'emboîtement

6.1 Le graphe du §3 traduit une certaine propriété des paires de permutations grassmanniennes ; des propriétés plus fines se lisent sur un nouvel objet combinatoire que l'on construit comme suit.

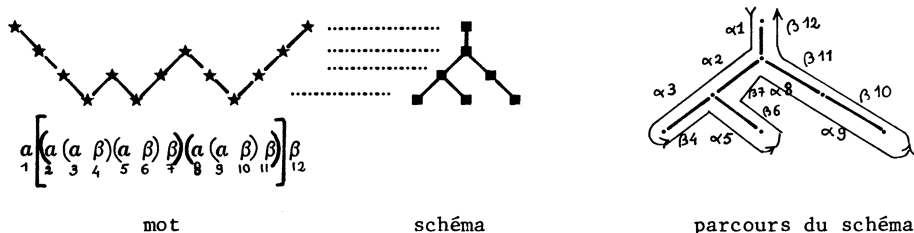
Soit w une permutation grassmannienne que nous considérerons comme un mot en a, β et représenterons par un chemin, ainsi qu'il est indiqué au §4. On lui associe un schéma d'emboîtement $A(w)$ qui décrit ses factorisation successives en éléments du centre : chaque paire $a \dots \beta$ en regard, c'est-à-dire telle que $w = w' a e \beta w''$, e appartenant au centre, correspond à un segment ; un facteur $a\beta$ (dit creux du chemin w) correspond à un segment terminal ; on définit par récurrence l'attachement des segments par :

i) $A(\beta \dots \beta a \dots a)$ est le schéma vide

ii) $A(w' \underline{a\beta} w'')$ est le schéma obtenu en attachant un segment au segment terminal de $A(w' \underline{a\beta} w'')$ correspondant au facteur $\underline{a\beta}$ souligné

iii) $A(w'w'')$ est le "produit" des schémas $A(w')$ et $A(w'')$ (i.e. les deux schémas sont réunis par leur sommet) si w' ou w'' appartient au centre.

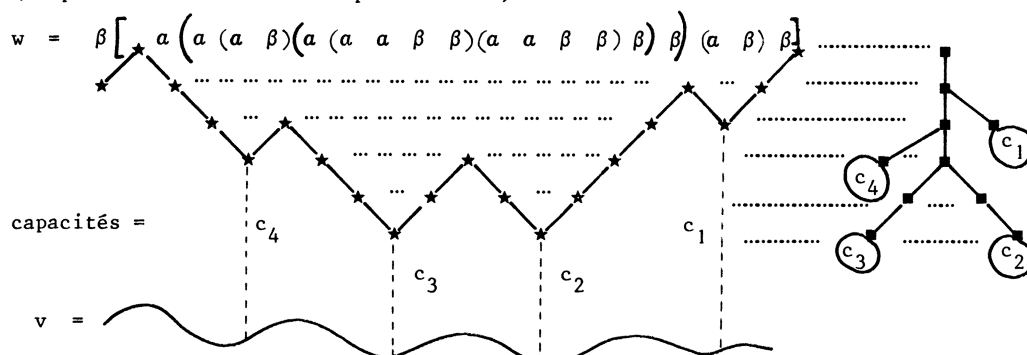
6.2 Exemple



On notera qu'en fait, si w appartient au centre, ce qui est le cas de l'exemple, on retrouve le mot w en parcourant le schéma comme on le fait en recherche systématique des données, a marquant un déplacement vers le bas et β vers le haut, et que dans le cas général, le mot ainsi obtenu en parcourant $A(w)$ est le plus grand sous-mot de w appartenant au centre.

6.3 Etant donnée une paire de mots (v, w) de mêmes degrés respectifs en a , β , tels que $v \leq w$ pour l'ordre de Bruhat (c'est-à-dire tels que le chemin v soit en dessous du chemin w), étant donné un creux $a\beta$ de w , on appelle capacité en ce creux la distance verticale de ce creux à v , i.e. si $w = w' a\beta w''$ et $v = v' v''$, avec $|v'| = |w'a|$, alors la distance est $|v''|_a - |w''|_a = |v''|_\beta - |\beta w''|_\beta$, où $|v|_\beta$ désigne le degré en β . La capacité de w par rapport à v est la collection des capacités des creux de w ; il est commode de faire figurer celles-ci sur des disques accrochés aux segments terminaux de $A(w)$ et de noter par $A(w/v)$ le schéma muni de ses disques.

Si v n'est pas en dessous de w , on pose : capacité de $w/v = \emptyset$ (ne pas confondre avec la capacité nulle).



6.5 Un remplissage ν du schéma $A(w/v)$ est un remplissage de chaque segment par un entier ≥ 0 , de telle sorte que le remplissage soit décroissant (au sens large) de bas en haut, et que le remplissage de tout segment terminal n'excède pas sa capacité.

Le poids $|\nu|$ d'un remplissage est la somme des remplissages des segments.

La fonction génératrice des poids des remplissages, dite polynôme d'emboîtement du schéma $A(w/v)$ et notée $Q_w^v(q)$ est par définition $\sum_{\nu} q^{|\nu|}$, somme sur tous les remplissages de $A(w/v)$.

6.6 Lemme. $Q_{w', a\beta w''}^{v', a\beta v''} = Q_{w', a\beta w''}^{v', \beta a v''} + q^c Q_{w', w''}^{v', v''}$, où $c = |v'|_a - |w'|_a$ est la capacité du creux distingué.

En effet, étant donné un segment terminal $a\beta$, l'ensemble des remplissages se décompose en deux familles, suivant que l'on remplit ce segment par un entier $\leq c-1$ ou par c ; le premier ensemble a pour fonction génératrice des poids $Q_{w', a\beta w''}^{v', \beta a v''}$ et le second $q^c Q_{w', w''}^{v', v''}$.

7. Polynômes de K&L

7.1 Pour toute paire de permutations (v, w) , K&L ont défini un polynôme $P_w^v(q)$ en une variable q , de degré inférieur à $(lgw - lgv - 1)/2$, et posé

$$P_w^v(q) = \mu(v, w) q^{(lgw - lgv - 1)/2} + \text{termes de degré inférieur.}$$

D'après K&L 1, ces polynômes sont déterminés par les propriétés suivantes, que nous écrivons pour des mots grassmanniens $\{a, \beta\}^*$, avec l'ordre sur les lettres: $a < \beta$.

7.2.1 $P_w^v(q) = 0$ si $v \not\leq w$

7.2.2 Simplification à droite et à gauche : $P_{w'w''}^{w'vw''} = P_w^v$ et $P_{\emptyset}^{\emptyset}(q) = 1$

7.2.3 Normalisation. $P_{w'w_1w_2w''}^{v'v_1v_2v''} = P_{w'w_1w_2w''}^{v'v_2v_1v''}$ avec $v_1, v_2, w_1, w_2 \in \{a, \beta\}$, $w_1 \geq w_2$

7.2.4 Récurrence sur la longueur de w

i) $P_{w' \beta a \beta w''}^{v' z x y v''} = P_{w' a \beta \beta w''}^{v' x z y v''} + q P_{w' a \beta \beta w''}^{v' z x y v''} - \sum_u \mu(u, w) q^{(lgw - lgu + 1)/2} P_{u' u_1 u_2 u_3 u''}^{v' z x y v''}$

avec $x, y, z, u_1, u_2, u_3 \in \{a, \beta\}$, $z \geq x$, $|v'| = |w'| = |u'|$, somme sur tous les mots u tels que $u_1 \geq u_2 \geq u_3$.

ii) formule analogue pour $P_{w' a \beta a w''}^{v' y z x v''} = P_{w' a a \beta w''}^{v' y x z v''} + \dots$

7.3 La règle 7.2.3 entraîne l'invariance des polynômes $P_w^v(q)$ par l'action sur v d'un sous-groupe de Schur (dépendant de w): au dessus d'une suite décroissante de lettres de w , on a le droit de permuter arbitrairement les lettres de v

sans changer le polynôme, i.e., si $w_1 \geq w_2 \geq \dots \geq w_n$, alors

$$P_{w'_1 \dots w'_n}^{v'_1 \dots v'_n v''} = P_{w'_1 \dots w'_n}^{v'_1 u_1 \dots u_n v''}$$

($u_1, \dots, u_n$) étant une permutation quelconque de $(v_1, \dots, v_n)$.

Etant donné w , on choisit dans l'orbite de v sous l'action de ce groupe l'élément $\bar{v}$ de plus grande longueur, c'est-à-dire tel que tout facteur de $\bar{v}$ au dessus d'un facteur décroissant de w soit décroissant ; $\bar{v}$ est dit le normalisé (par rapport à w) de v .

Il est clair que si l'on considère les creux $a\beta$ plutôt que les suites décroissantes, on a la caractérisation suivante :

7.4 Lemme. v est normalisé par rapport à w si et seulement si tout facteur $a\beta$ de v est au dessus d'un facteur $a\beta$ de w .

Soit deux mots tels que $\begin{cases} v = v' x a \beta v'' \\ w = w' \beta a w'' \end{cases}$. En appliquant la récurrence 7.2.4 aux mots $v' x a \beta v''$ et $v' x \beta a v''$, et en soustrayant, on obtient le lemme fondamental suivant qui permet le calcul effectif des polynômes de K&L :

$$\text{7.5 Lemme. } P_{w' \beta a w''}^{v' x a \beta v''} - P_{w' \beta a w''}^{v' x \beta a v''} = q^\delta (P_{w' a \beta w''}^{v' a \beta x v''} - P_{w' a \beta w''}^{v' \beta a x v''})$$

avec $\delta = \chi(x=a)$, i.e. $\delta = 1$ si $x = a$, $= 0$ si $x \neq a$.

En effet, d'après la règle de normalisation 7.2.3, les termes en u s'éliminent :

$$\sum_u \mu(u, w) q^{lg} P_{u' u_1 u_2 u_3}^{v' x a \beta v''} = \sum_u \mu(u, w) q^{lg} P_{u' u_1 u_2 u_3}^{v' x \beta a v''} \text{ puisque } u_1 \geq u_2 \geq u_3.$$

Si $x = \beta$, on en tire, en n'écrivant que le triple de lettres permutées :

$$P_{\beta a \beta}^{\beta a \beta} - P_{\beta a \beta}^{\beta \beta a} = P_{a \beta \beta}^{\beta a \beta} - P_{a \beta \beta}^{\beta \beta a} + q (P_{a \beta \beta}^{\beta a \beta} - P_{a \beta \beta}^{\beta \beta a}) = P_{a \beta \beta}^{\beta a \beta} - P_{a \beta \beta}^{\beta \beta a} \text{ d'après la règle 7.2.3.}$$

Si au contraire $x = a$, on obtient $P_{\beta a \beta}^{a a \beta} - P_{\beta a \beta}^{a \beta a} = q (P_{a \beta \beta}^{a \beta a} - P_{a \beta \beta}^{\beta a a})$, et le lemme n'est autre qu'une écriture condensée de ces deux cas.

Symétriquement, on a :

$$\text{7.6 Lemme. } P_{w' a \beta w''}^{v' a \beta x v''} - P_{w' a \beta w''}^{v' \beta a x v''} = q^{1-\delta} (P_{w' a a \beta w''}^{v' x a \beta v''} - P_{w' a a \beta w''}^{v' x \beta a v''})$$

avec $1-\delta = \chi(x = \beta) = 1 - \chi(x = a)$.

7.7 Au paragraphe 3, nous avons donné le terme de degré maximum du polynôme $P_w^v(q)$ en affirmant que la fonction μ ne prenait que les valeurs 0 ou 1, et en caractérisant les paires telles que $\mu(v, w) = 1$. Ces propriétés découlent du théorème suivant, qui établit que les polynômes de K&L pour les grassmanniennes ne sont autres que les polynômes d'emboîtement du §6.

7.8 Théorème. Soit deux permutations grassmanniennes v, w . Le polynôme de K&L

$P_w^v(q)$ est la fonction génératrice des poids des remplissages du schéma d'emboîtement $A(w/v)$, c'est-à-dire, on a, avec les définitions du §6

$$P_w^v(q) = Q_w^v(q) = \sum_{\nu} q^{|\nu|}$$

somme sur tous les remplissages de $A(w/v)$

Démonstration. On peut supposer que v est normalisé par rapport à w . Choisisant un facteur $a\beta$ dans v (qui est donc au dessus d'un facteur $a\beta$ dans w), on peut le porter par application successive des lemmes 7.4 et 7.5 en début des mots v et w : partant de $\begin{cases} v = v'a\beta v'' \\ w = w'a\beta w'' \end{cases}$, on obtient :

$$P_w^v - P_{w'a\beta w''}^{v'a\beta v''} = q^c (P_{a\beta w'w''}^{a\beta v'v''} - P_{a\beta w'w''}^{\beta a v'v''}) = q^c P_{a\beta w'w''}^{a\beta v'v''} = q^c P_{w'w''}^{v'v''} \quad \text{avec } c = \text{capacité du creux considéré} = |v'|_a - |w'|_a \quad (\text{le terme } P_{a\beta w'w''}^{\beta a v'v''} \text{ est nul puisque } \beta a v'v'' \not\leq a\beta w'w'')$$

Les polynômes d'emboîtement vérifient la même formule (Lemme 6.6). Comme $\lg(w'a\beta w'') - \lg(v'a\beta v'')$ et $\lg(w'w'') - \lg(v'v'')$ sont strictement inférieures à $\lg(w) - \lg(v)$, le déplacement ci-dessus du facteur $a\beta$ prouve par récurrence sur $\lg(w) - \lg(v)$ l'identité $P_w^v(q) = Q_w^v(q)$ Q.E.D.

8. Polynôme d'un ruban.

8.1 On dit que w/v est un ruban lorsque toutes les capacités de w par rapport à v sont égales à 0 ou 1, et que v est normalisé par rapport à w .

Si $\begin{cases} v = v'a\beta v'' \\ w = w'a\beta w'' \end{cases}$ et si la capacité en le creux $a\beta$ distingué est 0, il est alors clair que $Q_w^v(q) = Q_{w'}^{v'}(q) \cdot Q_{w''}^{v''}(q)$, la capacité 0 partageant le schéma $A(w/v)$ en deux parties :



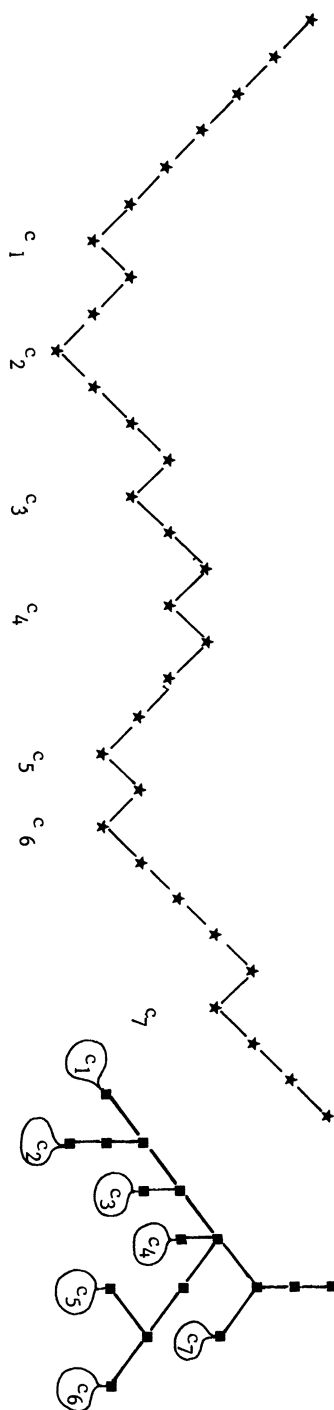
On peut donc supposer que le ruban est connexe, c'est-à-dire que toutes les capacités sont égales à 1. On écrira alors $P_w(q)$ pour $P_w^v(q)$.

Les $P_w(q)$ se calculent directement sur le parenthésage de w en éléments du centre ; il est clair en effet que les fonctions génératrices des poids des remplissages vérifient dans ce cas les règles suivantes qui les déterminent :

$$8.2.1 \quad P_{w'w''} = P_{w'} \cdot P_{w''} \quad \text{si } w' \text{ ou } w'' \text{ appartient au centre}$$

$$8.2.2 \quad P_{\beta \dots \beta a w \beta a \dots a} = P_w + q^{p+1}, \quad \text{avec } p = \text{degré}(P_w)$$

CALCUL D'UN POLYNÔME



$$a \left[a \left(a \left(a \left(a \left(a \left(a \left(a \left(a \left(a \left(a \left(a \left(a \left(a \left(a \right) \right) \right) \right) \right) \right) \right) \right) \right) \right) \right) \right) \right) \right] (a \beta) \beta \beta$$

Polynôme dans le cas de la liaison $(c_1 = \dots = c_7 \neq 1)$:

$$\left[\left(\left(\left((1+q) (1+q+q^2) + q^4 \right) (1+q) + q^6 \right) (1+q) (q^4 + q^3 + (1+q) (1+q)) + q^{12} \right) (1+q) + q^{14} + q^{15} \right]$$

$$= 1 + 7q + 22q^2 + 42q^3 + 57q^4 + 62q^5 + 58q^6 + 47q^7 + 32q^8 + 18q^9 + 9q^{10} + 4q^{11} + 2q^{12} + q^{13} + q^{14} + q^{15}$$

Exemple 8.3



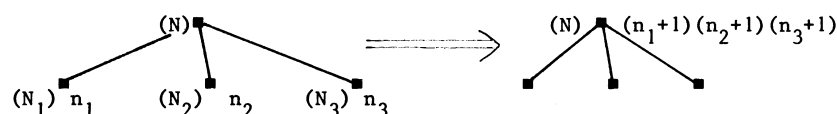
8.4 On en déduit la règle de calcul suivante pour les valeurs $P_w(1)$ qui interviennent dans la théorie des modules de Verma (cf.[Brylinski]) :

l'algorithme consiste à numéroté de bas en haut, par étage horizontal, les noeuds du schéma $A(w)$, et non plus les segments :

i) on porte 1 sur tous les noeuds terminaux du bas

ii) En un noeud N , on porte $\Pi(n_i+1)$, où les n_i sont les nombres portés par les noeuds N_i de l'étage inférieur, tels que NN_i soit un segment de $A(w)$,

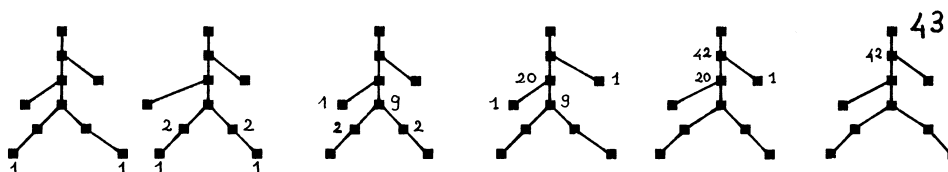
par exemple



Il est clair que cet algorithme est équivalent aux relations 7.2 lorsque l'on y pose $q = 1$, et donc on a le

Lemme. $P_w(1)$ est le nombre porté par le noeud supérieur du schéma $A(w)$.

Dans le cas de l'exemple 6.4, on trouve



8.5 Du même algorithme, on tire que

Lemme. $P_w(-1) = \begin{cases} 0 & \text{si } P_w(1) \text{ est pair} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

8.6 Interprétation des coefficients de $P_w(q)$

$P_w(q)$ est la fonction génératrice des poids des remplissages par les entiers 0 ou 1 du schéma $A(w)$. Chaque remplissage consiste à choisir des sous-schémas terminaux de $A(w)$ et à les remplir par 1. Ceci entraîne que les coefficients de $P_w(q)$ peuvent être interprétés comme dénombrant les sous-mots de w appartenant au centre :

Si l'on pose $P_w(q) = 1 + a_1 q + a_2 q^2 + \dots$, alors a_1 est le nombre de facteurs $a\beta$ dans w , a_2 est le nombre de facteurs $aa\beta\beta$ + le nombre de paires de facteurs $a\beta$, etc...

9. Capacités infinies

9.1 Un autre cas où l'écriture des $P_w^v(q)$ est immédiate est lorsque les capacités tendent vers l'infini, c'est-à-dire, on remarque que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_w^{anv\beta n}}{\beta^n w a^n}$

existe en tant que série formelle et ne dépend pas de v (c'est la fonction génératrice des poids des remplissages de $A(w)$ par des entiers ≥ 0).

On peut noter cette limite

$$P_w^{-\infty}(q)$$

et les règles 8.2 sont remplacées par

$$9.2.1 \quad P_{w'w''}^{-\infty} = P_{w'}^{-\infty} \cdot P_{w''}^{-\infty} \text{ si } w' \text{ ou } w'' \text{ appartient au centre}$$

$$9.2.2 \quad P_{aw\beta}^{-\infty} = P_w^{-\infty} \cdot 1/(1-q^{p+1}) \text{ où } p \text{ est le nombre de segments de } A(w)$$

$$9.2.3 \quad P_{\beta \dots \beta w a \dots a}^{-\infty} = P_w^{-\infty}$$

9.3 De ces règles, on déduit l'algorithme suivant, qui consiste à numéroté les segments de $A(w)$ de bas en haut :

Soit un segment B et soit $p(B)$ le nombre de segments du schéma en dessous, segment B compris. Alors

Lemme. $P_w^{-\infty}(q) = \prod_B 1/(1-q^{p(B)})$, produit sur tous les segments B de $A(w)$.

Ceci est analogue au calcul des dimensions des représentations du groupe symétrique, ou du groupe linéaire $GL(n)$, pour $n \rightarrow \infty$ (les $p(B)$ sont alors dits "longueurs des équerres" ou "hook-lengths").

9.4 Un mot $a^p \beta^p$ donne $P_{a^p \beta^p}^{-\infty}(q) = 1 / (1-q) \dots (1-q^p)$, et donc, si p est le nombre de segments de $A(w)$, alors

$$P_w^{-\infty}(q) / P_{a^p \beta^p}^{-\infty}(q) = (1-q) \dots (1-q^p) / \prod_B (1-q^{p(B)})$$

Le rapport de ces deux séries est en fait un polynôme qui intervient dans la belle théorie des $P\omega$ -partitions de R. Stanley, dont nous ne dirons rien ici, et pour laquelle nous renvoyons au livre d'Andrews et aux exercices de Knuth.

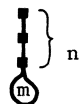
10. Quelques propriétés des polynômes de K&L

Dans la famille des polynômes de K&L, on trouve les polynômes fondamentaux que sont les polynômes de Gauss :

10.1 Lemme.
$$\frac{P_{a^m a^n \beta^n \beta^m}^{-\infty}}{P_{\beta^m a^n \beta^n a^m}^{-\infty}} = (1-q^{m+n}) \dots (1-q^{m+1}) / (1-q) \dots (1-q^n)$$

polynôme dit polynôme de Gauss et noté $\binom{m+n}{n}_q$

En effet, le schéma $A(w/v)$ est dans ce cas connu que les remplissages décroissants au sens $\in \{1, 2, \dots, m\}$ ont pour fonction génératrice $\binom{m+n}{n}_q$



dont il est bien large par des entiers (cf. [Andrews]).

10.2 D'après la définition qu'en donnent K&L, le polynôme $P_w^v(q)$ a un degré $\leq (lgw - lgv - 1)/2$ si $v < w$; ce nombre est dit degré maximum pour le couple (v, w) . Il est commode de considérer que $P_w^w(q) (=1)$ n'est pas de degré maximum. Le lemme suivant montre qu'il est facile de caractériser les polynômes de liaison, i.e. correspondant aux couples de degré maximum.

10.3 Lemme. $P_w^v(q)$ est de degré maximum si et seulement si w est lié à v (au sens du §3), c'est-à-dire si et seulement si $\begin{cases} v = w' a e \beta w'' \\ w = w' \beta e a w'' \end{cases}$ avec e appartenant au centre.

Démonstration. Tout d'abord, d'après 7.2.3, v doit être normalisé dans le cas du degré maximum, c'est-à-dire tout facteur $a\beta$ de v doit être au dessus d'un facteur $a\beta$ de w si $lgw - lgv > 1$. Soit donc un facteur $a\beta$ commun :
 $\begin{cases} v = v' a\beta v'' \\ w = w' a\beta w'' \end{cases}$ et soit c la capacité de w/v en le creux associé au facteur considéré. D'après le lemme 6.6 ,

$$\text{degré } P_w^v(q) = c + \text{degré } P_{w'w''}^{v'v''}(q) .$$

Or, notant $v = v_1 \dots v_n$ et $w = w_1 \dots w_n$, $v_i, w_i \in \{a, \beta\}$, alors si $v \leq w$,
 $lgw - lgv = \sum_{i=1}^{i=n} |v_1 \dots v_i|_a - |w_1 \dots w_i|_a$ (c'est l'aire entre les chemins v et w)
 et donc

$$lgw - lgv = lg(w'w'') - lg(v'v'') + 2c .$$

Il s'ensuit que pour que le polynôme $P_w^v(q)$ soit de degré maximum, il faut et il suffit que $P_{w'w''}^{v'v''}(q)$ le soit ; en particulier, il est nécessaire que $v'v''$ soit normalisé par rapport à $w'w''$. Éliminant tous les facteurs successifs $a\beta$ de v , on obtient donc le couple $(v^{\text{red}}, w^{\text{red}})$ et l'on a :

- ou bien v^{red} est à distance 1 de w^{red} , et alors v et w sont liés et $P_w^v(q)$ est de degré maximum puisque $P_{w^{\text{red}}}^{v^{\text{red}}}(q) = 1$ est de degré maximum ;
 - ou bien v^{red} n'a plus de facteur $a\beta$, i.e. $v^{\text{red}} = \beta \dots \beta a \dots a$, et dans ce cas, $w^{\text{red}} = v^{\text{red}}$ (puisque $w \geq v \Rightarrow w^{\text{red}} \geq v^{\text{red}}$) , ce qui implique que $w = v$, cas exclu. Q.E.D.

On notera que les polynômes d'emboîtement sont tous unitaires, ce qui n'est pas vrai pour les polynômes de K&L généraux (pour le groupe symétrique), mais seulement pour les polynômes de liaison . Le lemme 10.3 assure que le graphe grassmannien du §3 est bien le graphe de K&L .

11. Grassmanniennes.

11.1 Il est bien connu que de nombreuses propriétés du groupe symétrique ont leur contrepartie géométrique dans la théorie des variétés drapeaux sous le groupe linéaire, dont les grassmanniennes sont un cas particulier. De cette théorie, nous n'aurons besoin ici que de considérations élémentaires.

Soit E un espace vectoriel de dimension $m+n$ sur $\mathbb{C}$. L'ensemble des sous-espaces vectoriels V de E de dimension n est de manière naturelle une variété algébrique dite grassmannienne d'ordre n et notée $G_n(E)$.

Toute suite croissante $\mathbf{A} = 0 \subseteq A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq \dots \subsetneq A_n$ de sous-espaces vectoriels de E (dite drapeau) définit une sous-variété de $G_n(E)$, appelée variété de Schubert $\Omega(\mathbf{A})$: en tant qu'ensemble,

$$\Omega(\mathbf{A}) = \{V \mid \forall i, \dim(V \cap A_i) \geq i\}$$

Il est clair qu'étant donné deux drapeaux $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ de mêmes dimensions respectives, il existe au moins un élément de $GL(E)$ qui envoie $\mathbf{A}$ sur $\mathbf{B}$, et donc, à isomorphisme près, que $\Omega(\mathbf{A})$ ne dépend que des dimensions des A_i .

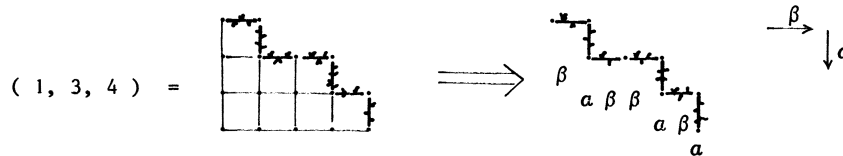
On pose

$$I = (i_1, \dots, i_n) = (\dim A_1 - 1, \dots, \dim A_n - n)$$

(I est une partition, i.e. une suite croissante au sens large), et l'on note Ω_I la variété de Schubert $\Omega(\mathbf{A})$ à isomorphisme près. Ainsi $\Omega_{0, \dots, 0}$ est un point et $\Omega_{m, \dots, m}$ est la grassmannienne $G_n(E)$; si $\dim A_1 = 0$, on pose $\Omega_{-1, \dots} = \emptyset$.

La dimension de Ω_I est le poids $|I| = i_1 + \dots + i_n$ de la partition I .

11.2 On représente usuellement une partition par un diagramme, qui, hors le Royaume Uni et ses dépendances, consiste en un empilement de $i_1, \dots, i_n$ boîtes rectifié à gauche, e.g.



La frontière nord-est du diagramme donne un mot $w(I) \in \{a, \beta\}^*$, lorsque l'on convient de coder un pas horizontal par β et par a un pas vertical; au §4, nous avons représenté ce mot par un chemin, qui, de fait, est obtenu à partir de la frontière du diagramme par une rotation d'angle $\pi/4$.

On dit qu'une partition J est contenue dans une autre I ($J \subset I$) si et seulement si cela est vrai de leurs diagrammes respectifs, lorsque l'on juxtapose leurs origines $\iff$ le chemin $w(J)$ est en dessous de $w(I)$

$$\iff w(J) \leq w(I) \text{ pour l'ordre de Bruhat}$$

$$\iff \Omega_J \text{ est une cellule dans la décomposition cellulaire naturelle de } \Omega_I.$$

11.3 Ecrivant $P_I^J(q)$ au lieu de $P_{w(I)}^{w(J)}(q)$, et en utilisant la cohomologie de Deligne-Goreski-MacPherson, on a alors :

Théorème ([K&L1]).

$$P_I^J(q) = \sum_i q^i \dim \Omega_I^{2i}(\Omega_J)$$

Nous donnons en annexe ces polynômes pour les grassmanniennes $G_n(m+n)$, avec $m, n \leq 4$. Certaines des propriétés des polynômes de K&L apparaissent clairement comme liées aux singularités des variétés de Schubert, sans qu'il soit nécessaire de rien savoir de la théorie cohomologique qui justifie ce rapport :

$$11.4 \quad P_I^J(q) = 0 \text{ si et seulement si } \Omega_J \not\subset \Omega_I.$$

$$11.5 \quad P_I^J(q) \neq 0, 1 \text{ si et seulement si } \Omega_J \text{ est contenu dans le lieu singulier de } \Omega_I.$$

En effet, le lieu singulier, en tant qu'ensemble, est la réunion des Ω_J tels qu'il existe au moins un creux du chemin $w(I)$ qui soit à distance ≥ 1 du chemin $w(J)$ (cf. [Svaneš ou [Lascoux]]).

$$\iff w(J) \text{ est en dessous de } w(I) \text{ et au moins une des capacités de } w(I) \text{ par rapport à } w(J) \text{ est } \geq 1.$$

$$\iff \text{il existe au moins un remplissage de } A(w(I)/w(J)) \text{ de poids } > 0.$$

11.6 Plus généralement, il est clair sur les schémas d'emboîtement que si $H \subset J \subset I$, alors $P_I^J(q) \leq P_I^H(q)$, et ces polynômes sont différents si au moins une des capacités de $w(I)/w(J)$ est différente de la capacité correspondante de $w(I)/w(H)$.

$$11.7 \quad \text{Soit } I = \underbrace{p \dots p}_r \underbrace{p+r \dots p+r}_p.$$

Alors Ω_I est une variété de Schubert dite spéciale (ou encore variété déterminantale), qui peut être définie par un drapeau ayant un seul élément : soit A un espace vectoriel de dimension $p+r = n$ dans E de dimension $2n$; alors

$$\Omega_I = \{V \mid \dim(V \cap A) \geq r\} \hookrightarrow G_n(E).$$

Il est facile de voir que le lieu singulier de Ω_I est stratifié en la suite emboîtée

$$\Omega_I \supset \Omega_{J_1} \supset \Omega_{J_2} \supset \dots \text{ des variétés } \Omega_{J_k} =$$

$$\{V \mid \dim(V \cap A) \geq r+k\} \text{ avec } J_k = \underbrace{p-k \dots p-k}_{r+k} \underbrace{n \dots n}_{p-k}.$$

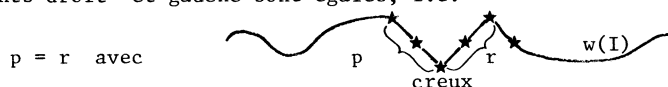
En fait (cf. Kleiman), il existe une désingularisation de Ω_I telle que la fibre au dessus d'un point de $\Omega_{J_k} - \Omega_{J_{k+1}}$ soit isomorphe à la grassmannienne $G_k(r+k)$. Il est classique que le polynôme d'Euler-Poincaré de cette dernière variété est le polynôme de Gauss $\binom{r+k}{k}_q$. Or c'est aussi le polynôme $P_I^{J_k}(q)$, puis-
que le schéma d'emboîtement $A(w(I)/w(J_k))$ est dans ce cas



Les $P_I^J(q)$ mesurent donc dans ce cas la désingularisation de Kleiman de Ω_I (cette désingularisation est "minimale" en un sens que nous ne préciserons pas).

11.8 Les composantes irréductibles du lieu singulier de Ω_I sont les Ω_J :

J est toute partition telle que
$$\begin{cases} w(I) = w' \beta a^p \beta^r a w'' \\ w(J) = w' a a^p \beta^r \beta w'' \end{cases} \quad (\text{on choisit un creux de } w(I) \text{ et on l'abaisse d'une distance } 1)$$
. Or la variété Ω_I est de Gorenstein (cf. [Svanes]) si et seulement si pour tout creux de $w(I)$, les longueurs des versants droit et gauche sont égales, i.e.



(dans ce cas les syzygies canoniques de Ω_I sont symétriques, cf. [Lascoux]).

En d'autres termes, d'après le §9, on a la caractérisation suivante :

11.9 Proposition. La variété de Schubert Ω_I est de Gorenstein si et seulement si pour toute composante irréductible du lieu singulier, le polynôme $P_I^J(q)$ est de degré maximum (et dans ce cas, il est symétrique).

RÉFÉRENCES.

- Andrews G. The theory of partitions, Encyclopedia of Maths, Vol.2 .
- Brylinski J-L. & Kashiwara M. Démonstration de la conjecture de K&L sur les modules de Verma. C.R.Acad.Sc.Paris 291(1980) 373-376 .
- DeConcini C. & Procesi C. Symmetric functions, conjugacy classes and the flag variety. Invent. 64(1981) 203-220 .
- Kazhdan D. & Lusztig G.1 Representations of Coxeter groups. Invent. 53 (1979) 165-184.
- Kazhdan D. & Lusztig G.2 Schubert varieties and Poincaré Duality
Proc. Symp. Pure Maths A.M.S. 1980.
- Knuth Donald Irving. The Art of Computer Programming, vol.3, Addison-Wesley .
- Kraft H. Conjugacy classes and Weyl Group Representations, ce volume .
- Lascoux A.1 . Polynômes symétriques, Foncteurs de Schur et Grassmanniennes,
Thèse Université Paris 7 (1977).
- Lascoux A.2 . Finite linear groups, Tagung über Invariantentheorie, Bonn 1978.
- Lascoux A. & Schützenberger M.P. Le Monoïde Plaxique, Napoli 1978 (à paraître dans les Quaderni della Ricerca Scientifica).
- Lusztig G. Green polynomials and Singularity of unipotent classes
Adv.in Math 42 (1981) 169-178 .
- Macdonald I.G. Symmetric functions and Hall polynomials, Oxford Math.Monographs 1979.
- Svanes T. Coherent cohomology on Schubert subschemes of flag schemes
Adv. in Math. 14 (1974) 369-453 .
- Schützenberger M.P. Tableaux de Young, Sém.Th.Nombres Pisot, Paris 1977/78 .



POLYNÔMES DANS LE CAS GRASSMANNIEN

Nous donnons tous les polynômes $P_w^v(q)$ pour w correspondant à une partition $I(w) = (i_1, \dots, i_4) : 0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_4$ (Grassmanniennes $G_n(m+n)$, $m, n \leq 4$). On n'a écrit les polynômes que pour certains $v \in V(w)$, car l'on a pour les autres

$$P_w^u(q) = P_w^{v(u)}(q) \quad \text{avec} \quad v(u) = \inf \{ v \in V(w), u \leq v \}$$

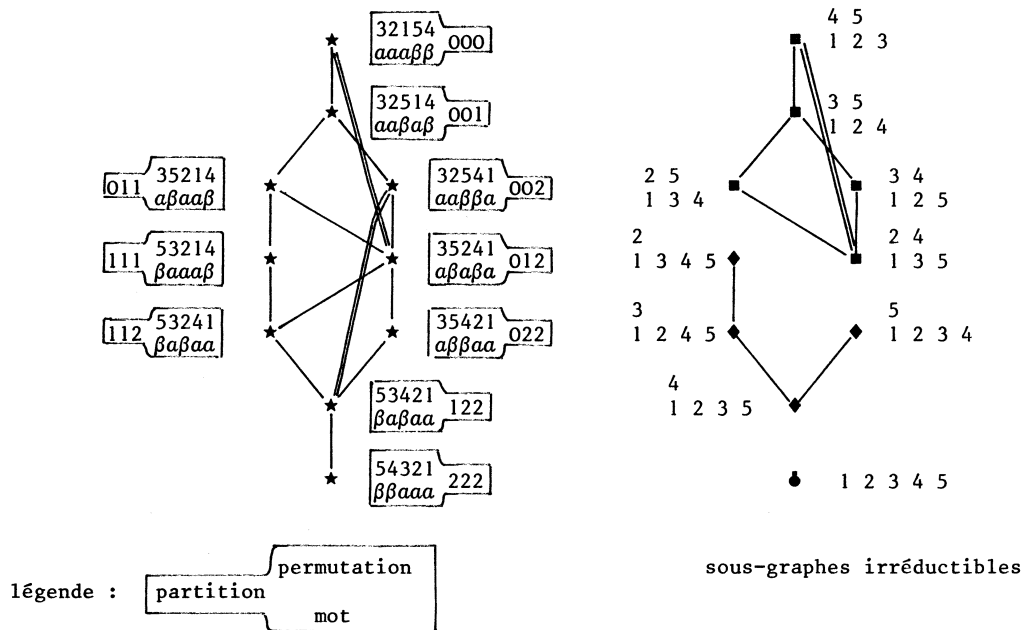
En d'autres termes, étant donnée une partition u , on cherche dans la table pour w fixé, la plus petite de celles qui la contiennent.

Si w est un rectangle (i.e. $I(w) = 0, \dots, 0, n, \dots, n$), alors $P_w^v(q) = 1$ si $v \leq w$ et $= 0$ sinon; de plus, si $w = w_1 w' w_2$ et $v = w_1 v' w_2$, alors $P_w^v(q) = P_{w'}^{v'}(q)$. Moyennant ces deux remarques, la table est complète.

$I(w)$	
3444	2244 : $1+q$ 1114 : $1+q+q^2$ 0000 : $1+q+q^2+q^3$
3344	2224 : $1+q$ 1111 : $1+q+q^2$
2444	1144 : $1+q$ 0004 : $1+q+q^2$
2344	1144 : $1+q$ 2224 : $1+q$ 1124 : $(1+q)^2$ 0004 : $(1+q)(1+q+q^2)$: 1111
3334	2222 : $1+q$ 0001 : $(1+q+q^2)^2$
1444	0044 : $1+q$
2244	1114 : $1+q+q^2$ 0000 : $(1+q^2)(1+q+q^2)$
2334	1134 : $1+q$ 2222 : $1+q$ 1122 : $(1+q)^2$ 0004 : $1+q+q^2$ 0002 : $(1+q)(1+q+q^2)$
1344	0044 : $1+q$ 1224 : $1+q$ 0024 : $(1+q)^2$ 1111 : $1+q+q^2$ 0011 : $(1+q)(1+q+q^2)$
1334	0034 : $1+q$ 1222 : $1+q$ 0022 : $(1+q)^2$
1244	0044 : $1+q$ 1144 : $1+q$ 0014 : $(1+q)^2$ 0000 : $(1+q)(1+q+q^2)$
2234	2222 : $1+q$ 1114 : $1+q$ 1112 : $(1+q)^2$ 0000 : $(1+q)(1+q+q^2)$
1234	0034 : $1+q$ 1114 : $1+q$ 1222 : $1+q$ 0014 : $(1+q)^2$ 1112 : $(1+q)^2$ 0022 : $(1+q)^2$ 0012 : $(1+q)^3$ 0000 : $(1+q)^2(1+q+q^2)$
2224	1111 : $1+q+q^2$
1144	0004 : $1+q+q^2$
1224	1111 : $1+q+q^2$ 0024 : $1+q$ 0011 : $(1+q)(1+q+q^2)$
1134	0004 : $1+q+q^2$ 1122 : $1+q$ 0002 : $(1+q)(1+q+q^2)$
1124	0004 : $1+q$ 1111 : $1+q$ 0001 : $1+2q+q^2+q^3$
1114	0000 : $1+q+q^2+q^3$



REPRÉSENTATION SUR UN ENSEMBLE DE MOTS



On a construit le graphe comme indiqué au §3 ; les deux liaisons non triviales sont obtenues par déplacement de $a\beta$:

$$\begin{array}{ccc} a\beta & a\beta & a\beta \\ a\beta & a\beta & a\beta \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} a & a\beta & a\beta \\ a & a\beta & \beta a \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} aa & a\beta & \beta \\ a\beta & a\beta & a \end{array}$$

triviale non triviales

En remplaçant $..a..a..a..$ par $..3..2..1..$ et $..\beta..\beta..$ par $..5..4..$, on associe à chaque mot une permutation, et une partition en lisant le mot comme un

chemin dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:

a	β	a	β	a

0
1
2

= partition (0,1,2) ,

ou bien encore, en prenant les placés de a dans le mot et en leur soustrayant respectivement 1,2,3 : $a\beta a\beta a \longrightarrow \text{places } (1,3,5) \longrightarrow \text{partition } (0,1,2)$.

La représentation figurée ci-dessus est la somme des représentations irréductibles de S_5 indexées par les partitions (2,3) , (1,4) et (0,5) de dimensions respectives 5, 4, 1 ; ces représentations correspondent aux trois sous-graphes dont les sommets sont les tableaux de Young standard de formes respectives (2,3), (1,4) et (0,5), les dits tableaux étant dérivés des mots par les techniques appropriées du monoïde plaxique.