

GÉOMÉTRIE ALGÈBRE. — *Polynômes de Schubert*. Note (*) de **Alain Lascoux** et **Marcel-Paul Schützenberger**, Correspondant de l'Académie.

Nous définissons une famille de polynômes généralisant les fonctions symétriques de Schur, qui grâce à l'introduction d'une forme quadratique, permettent des calculs effectifs dans l'anneau de cohomologie des variétés de drapeaux.

ALGEBRAIC GEOMETRY. — Schubert Polynomials.

We define a family of polynomials generalizing Schur symmetrical functions. We examine a subfamily and give explicit relations hips in the cohomology ring of the flag manifold.

1. On considère l'anneau $\mathbb{Z}[A]$ des polynômes en les variables de $A = A_{n+1} = \{a_1, \dots, a_{n+1}\}$ et le groupe $W = W_{n+1}$ des permutations de A ; W est engendré par les transpositions σ_i échangeant a_i et a_{i+1} ; chaque $w \in W$ est étendu à un isomorphisme $f \rightarrow f^w$ de $\mathbb{Z}[A]$ et on utilise l'abréviation $f^{1+w} = f + f^w$; les annexes I et II précisent les autres notations.

Soient $r', r'' \in \mathbb{Z}$ fixes; on associe à chaque σ_i l'opérateur linéaire $D_{\sigma_i}(r', r'')$, noté D_σ lorsqu'aucune confusion n'est possible, envoyant chaque $f \in \mathbb{Z}[A]$ sur le polynôme :

$$(1.1) \quad f D_\sigma = [f(r' + r'' a_i)/(a_i - a_{i+1})]^{1+\sigma_i} \in \mathbb{Z}[A].$$

On vérifie que $D_\sigma D_\sigma = r'' D_\sigma$ et que pour tout autre transposition τ :

$$(1.2) \quad D_\sigma D_\tau = D_\tau D_\sigma \quad \text{ou} \quad D_\sigma D_\tau D_\sigma = D_\tau D_\sigma D_\tau,$$

selon que σ et τ commutent ou non.

Donc, d'après la proposition 5 de [14], l'opérateur $D_w = D_\sigma D_{\sigma'} \dots D_{\sigma''}$, où $\sigma \sigma' \dots \sigma''$ est une décomposition réduite de w , est bien défini pour chaque $w \in W$. On pose désormais $\partial_w = D_w(1, 0)$ et $\pi_w = D_w(0, 1)$ (cf. [1] et [3], [4] pour ∂ , et indépendamment [5] pour π), et l'on désigne par ω l'élément de longueur maximale de W .

(1.3) DÉFINITION. — Pour chaque permutation $w \in W$, le *polynôme de Schubert* d'indice w est $X_w = a^E \partial_{\omega w}$ où $a^E = a_1^n a_2^{n-1} \dots a_n$ (cf. annexe).

Par construction, X_w est symétrique en a_i et a_{i+1} si et seulement si $1(w) < 1(w \sigma_i)$.

On reconnaît dans :

$$(1.4) \quad f \pi_\omega = \prod_{i < j} (a_i - a_j)^{-1} \sum_w [(-1)^{l(w)} a^E f]^w,$$

l'expression du symétriseur de Bott, et celle du symétriseur de Jacobi ∂_w serait obtenue en remplaçant a^E par 1 dans (1.4). Les fonctions de Hall-Littlewood [11] de paramètre q sont données par la formule :

$$(1.5) \quad Q_I = (\prod_{i < j} (1 - qa_j/a_i) a^{I^\dagger}) \pi_\omega,$$

pour toute suite non décroissante I d'entiers positifs.

Comme (1.1) et (1.2) restent valables dans l'algèbre du groupe commutatif engendré par les éléments de A , on peut prendre pour f un monôme a^I où $I \in \mathbb{Z}^{n+1}$. Utilisant les définitions de l'annexe et la factorisation de π_ω en produit de π_w , on obtient la forme combinatoire du théorème classique de Bott :

$$(1.6) \text{ THÉORÈME (Bott). — Si } I \geq -E, \text{ alors } a^I \pi_\omega = S_{I^\dagger}(A).$$

2. LA FORMULE DE PIERI. — Soit X_w un polynôme de Schubert et I le code de w . Il résulte immédiatement de la définition (1.3) que X_w est un polynôme de degré $l(w) = |I|$ en les variables de $A_m = \{a_1, \dots, a_m\}$, où m est la longueur de I .

Un calcul facile montre que $X_w = X_{w'}$ quand w' est la permutation de $W_{n'+1}$, $n' \geq n$, ayant même code I que w .

Si I est une suite non décroissante, X_w est la fonction de Schur $S_K(A_m)$ dont l'indice K est l'évaluation de I ; les polynômes de ce type correspondent aux sous-variétés de Schubert des grassmanniennes, variétés dites « spéciales » lorsque $X_w = S_p(A_m)$ ou $= \Lambda_p(A_m)$, $1 \leq p, m \leq n$. La formule 2.2 ci-dessous pour $p = 1$ (c'est-à-dire pour $X = S_1(A_m) = \Lambda_1(A_m) = a_1 + \dots + a_m$) est due à Monk [12]; Hiller [8] a montré que cette dernière entraînait les résultats classiques pour les grassmanniennes.

(2.1) DÉFINITION. — Soient $w \in W$ et $p, m \geq 1$. Un m -soulèvement gauche (resp. droit) de degré p de w est une permutation ζ telle que, $\zeta = \zeta_1 \zeta_2 \dots \zeta_k$ étant sa décomposition en cycles, on ait :

$$(2.1.1) \quad p = l(w\zeta) - l(w) = \sum l(\zeta_i);$$

(2.1.2) pour chaque cycle ζ_i , posant $w_i = w\zeta_i$, d'une part $iw > iw_i$ (resp. $iw < iw_i$) pour exactement un j , $1 \leq j \leq n+1$, et d'autre part $j'w \neq j'w_i$ pour exactement un $j' > m$ (resp. $j' < m$).

(2.2) FORMULE. — Soient $w \in W$ et $X = \Lambda_p(A_m)$ (resp. $= S_p(A_m)$). Si $n \geq m+p$, on a :

$$XX_w = \sum X_{w\zeta},$$

où la somme est étendue à tous les m -soulèvements gauches (resp. droits) de degré p de w .

Par exemple, si $X = \Lambda_2(A_5)$ (i.e. $= \sum_{1 \leq i < j \leq 5} a_i a_j$) et $w = 351974286$, on trouve $XX_w = X_{473981256} + X_{472983156} + X_{463981275} + X_{462983175}$.

La preuve se fait par double récurrence sur p et m au moyen de l'identité $\Lambda_p(A_{m+1}) = \Lambda_p(A_m) + a_{m+1} \Lambda_{p-1}(A_m)$ (resp. de l'identité correspondante pour S_p).

Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des paires $(w, w') \in W \times W$ telles que l'on puisse trouver $a \in A$ et $v, w_1, \dots, w_k \in W$ satisfaisant $X_w = X_{w'} - aX_v = \sum X_{w_i}$; $\mathcal{T}$ est la relation de consécutivité d'une relation d'ordre. Soit d'autre part $\succ$ la fermeture de transitivité de l'union de $\mathcal{T}$ et des paires (w, w') et (w', w) telles que $X_{w'}^\zeta = X_w$ où ζ désigne la permutation circulaire envoyant chaque a_i sur a_{i+1} . Le préordre $\succ$ est invariant pour $w \rightarrow w^{-1}$ et l'équivalence associée $\approx$ est invariante pour $w \rightarrow \omega w \omega$; quand $w \approx w'$, les codes de w et de w' ont même évaluation.

Ces remarques se déduisent du cas $p=1$ de la formule 2.2; elles permettent de montrer que les X_w sont des polynômes à coefficients non négatifs et que $X_w = (a_1 + \dots + a_m)(a_1 + \dots + a_{m'}) \dots (a_1 + \dots + a_{m''})$, où $m, m', \dots, m''$ forme une suite croissante d'entiers dont les différences sont au moins égales à 2, quand w est maximal pour $\succ$.

3. UNE FAMILLE PARTICULIÈRE. — Soit $S_1(\mathbb{B})$ une fonction de Schur drapeau. On dit que la suite $I = (i_1, \dots, i_m)$ encadre $\mathbb{B}$ si $\text{card}(\mathbb{B}_{m'} \setminus \mathbb{B}_k) \leq m' - k + i_m - i_k$ pour tout $m' \leq m$ et tout $k < m'$, tel que $i_{k-1} \neq i_k$. Lorsque I est une partition et que I encadre $\mathbb{B}$, il existe une suite $\mathbb{C}$ non décroissante de parties de A et une partition J' telles que $S_1(\mathbb{B}) = \Lambda_{J'}(\mathbb{C})$; cette propriété de dualité admet une réciproque moyennant quelques définitions supplémentaires (cf. [9]).

(3.1) THÉORÈME. — Une fonction de Schur drapeau $S_I(\mathbb{B})$ est un polynôme de Schubert si et seulement si I est une partition et encadre $\mathbb{B}$, et dans ce cas I est l'évaluation du code de la permutation indiquant le polynôme de Schubert.

Réciproquement, soit $w \in W$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) X_w est une fonction de Schur drapeau;
- (ii) w appartient à une classe minimale de $\succ$;
- (iii) l'évaluation du code de w^{-1} est l'adjointe de l'évaluation du code de w ;
- (iv) $w \approx w'$ où $X_{w'}$ est une fonction de Schur propre;
- (v) $w \approx w'$ où $X_{w'}$ est un monôme.

La preuve se fait par induction sur la longueur de w . Elle repose sur un diagramme montré à l'un de nous par J. Riguet il y a maintes années qui joue vis-à-vis des fonctions de Schubert un rôle analogue à celui du diagramme de Ferrers [11] pour les fonctions de Schur [13]. Cette construction n'a pu être développée ici.

4. UNE FORME QUADRATIQUE. — Soient $\mathcal{J}$ l'idéal de $\mathbb{Z}[A]$ engendré par les polynômes symétriques en toutes les variables et $\mathcal{H} = \mathbb{Z}[A]/\mathcal{J}$. Il est bien connu [2] que $\mathcal{H}$ peut s'interpréter comme l'anneau de cohomologie entière de la variété des drapeaux complets de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^{n+1}$; une $\mathbb{Z}$ -base de $\mathcal{H}$ est formée des classes dans $\mathcal{H}$ des X_w , que nous noterons encore par la même lettre.

Une autre base de $\mathcal{H}$ est $\mathcal{E} = \{a^I : I \in \mathbb{N}^{n+1} : I \leq E \dagger\}$.

Soient $a^I, a^J \in \mathcal{E}$. On pose :

$$(4.1) \quad \langle a^I, a^J \rangle = a^{I-J \dagger} \pi_\omega.$$

La différence $I' = I - J \dagger$ satisfait $-E \leq I' \leq E \dagger$. Donc d'après le théorème 1.6 et les remarques de la fin de l'annexe II, on a $\langle a^I, a^J \rangle = \langle a^{I'}, a^J \rangle \in \{-1, 0, 1\}$, avec de plus $\langle a^I, a^J \rangle = 0$ quand I et J n'ont pas le même poids. On étend par linéarité $\langle \cdot, \cdot \rangle$ à une forme quadratique $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{Z}$.

(4.2) THÉORÈME. — La base adjointe de $\mathcal{E}$ par rapport à $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est formée des polynômes $P_I = \prod_{0 \leq m \leq n+1} \Lambda_{i_m} (A \setminus A_{n-m+1})$ pour $I \in \mathbb{N}^{n+1}$ et $I \leq E \dagger$.

(4.3) THÉORÈME. — Pour tout $w, w' \in W$, $\langle X_w, X_{w'} \rangle \equiv (-1)^{l(w)}$ ou 0 selon que $w' = \omega w \omega$ ou non.

Ce dernier résultat est obtenu en étendant aux polynômes de Schubert un énoncé déjà connu pour les fonctions de Schur [10] et en utilisant le fait que si $l(w) + l(w') = l(\omega)$, on a $X_w X_{w'} \equiv a^E$ ou 0 selon que $w' = \omega w$ ou non (cf. Ehresmann [6], et Chevalley pour une extension aux groupes de Coxeter finis).

Si $Y \in \mathcal{H}$ est un polynôme homogène de degré p , la formule de redressement de Bott-Rota (Bott-Rota's straightening) :

$$(-1)^p Y \equiv \sum \langle Y, P_I \rangle a^I \equiv \sum \langle Y, a^I \rangle P_I \pmod{\mathcal{J}},$$

où la sommation porte sur toutes les suites $I : 0 \leq I \leq E \dagger$ de poids p , est un corollaire immédiat du théorème 4.2.; on notera qu'elle permet un calcul effectif dans $\mathcal{H}$.

ANNEXE I. — Le poids d'une suite $I = (i_1, \dots, i_m) \in \mathbb{Z}^m$ est la somme $|I|$ des i_j ; on utilise les abréviations $a^I = a_1^{i_1} \dots a_m^{i_m}$ et $I \dagger = (i_m, \dots, i_1)$, et on réserve la notation E pour la suite $(n, n-1, \dots, 1, 0)$; si tous les i_j sont ≥ 0 , l'évaluation de I est la partition de $|I|$ obtenue en réordonnant en ordre non décroissant les i_j strictement positifs.

Soit $w = (1w, 2w, \dots, (n+1)w) \in W$ une permutation, et I la suite telle que $i_j = \text{card} \{j' > j : j'w < jw\}$, $1 \leq j \leq n+1$. Il est clair que $0 \leq I \leq E$; le *code* (de Lehmer) de w est la suite $(i_1, \dots, i_m)$, où m est le plus grand indice pour lequel $i_m > 0$.

ANNEXE II. — Soit B une partie de A et $d \geq 0$. On définit $S_d(B)$ [resp. $\Lambda_d(B)$] comme le coefficient de z^d dans le développement de $\prod_{b \in B} (1 - zb)^{-1}$ [resp. $\prod_{b \in B} (1 + zb)$] et on pose $S_d(B) = \Lambda_d(B) = 0$ pour $d < 0$.

Soit $I = (i_1, \dots, i_m) \in \mathbb{Z}^m$, et $\mathbb{B} = (B_1, \dots, B_m)$ une suite de parties de A . Les fonctions de Schur $S_I(\mathbb{B})$ et $\Lambda_I(\mathbb{B})$ sont :

$$S_I(\mathbb{B}) = \det |S_{i_k + h - k}(B_k)|_{1 \leq h, k \leq m} \quad \text{et} \quad \Lambda_I(\mathbb{B}) = \det |\Lambda_{i_k + h - k}(B_k)|_{1 \leq h, k \leq m}.$$

On dit que $S_I(\mathbb{B})$ est une *fonction de Schur drapeau* si $B_1 \supset B_2 \supset \dots \supset B_m$, et une fonction de Schur propre si $B_1 = \dots = B_m (= B)$, auquel cas on écrit simplement $S_I(B)$.

Dans ce dernier cas, les règles de « redressement » classiques [11] montrent que $S_I(B) = S_{I'}(B)$ où I' est une suite non-décroissante de même poids que I et l'on sait que lorsque $-E \leq I \leq E^\dagger$, on a $S_{-I}(A) = S_{I^\dagger}(A) \in \{-1, 0, 1\}$ avec $S_I(A) = 0$ pour $|I| \neq 0$.

(*) Remise le 8 février 1982, acceptée le 29 mars 1982.

[1] I. N. BERNSTEIN, I. M. GELFAND et S. I. GELFAND, *Russian Math. Surv.*, 28, 1973, p. 1-26.

[2] C. DE CONCINI et C. PROCESI, *Inv. Math.*, 64, 1981, p. 203-220.

[3] M. DEMAZURE, *Inv. Math.*, 21, 1973, p. 287-301.

[4] M. DEMAZURE, *Ann. Sc. E.N.S.*, 7, 1974, p. 53-88.

[5] M. DEMAZURE, *Bull. Sc. Math.*, 98, 1974, p. 163-172.

[6] C. EHRESMANN, *Ann. Math.*, 35, 1934, p. 396-443.

[7] Z. GIAMBELLI, *Torino Atti*, 1903, p. 823-844.

[8] H. HILLER, *Ens. Math.*, 27, 1981, p. 57-84.

[9] A. LASCoux, *Bull. S.M.F.*, 102, 1974, p. 161-179.

[10] A. LASCoux, *Comptes rendus*, 281, série A, 1975, p. 813 et 851.

[11] I. G. MACDONALD, *Symmetric and Hall polynomials*, (Oxford Math. Monogr., 1979).

[12] D. MONK, *Proc. Lond. M.S.*, 9, 1959, p. 253-286.

[13] J. RIGUET, *Bull. S.M.F.*, 76, 1948, p. 114-155.

[14] N. BOURBAKI, *Groupes et Algèbres de Lie*, ch. 4, 5, 6, Hermann, Paris, 1968.

Laboratoire d'Informatique théorique et Programmation, L.A. 248,
Université Paris-VII, Tour 55-56, 2, place Jussieu, 75005 Paris.