

А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р



ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ • ТОМ 21 • ВЫПУСК 4

М О С К В А • 1 9 8 7

В нашем журнале публикуются оригинальные работы по актуальным вопросам функционального анализа и его приложений, а также информационные материалы о конференциях и семинарах по функциональному анализу.

Журнал рассчитан на научных работников в области функционального анализа и его приложений.

Журнал выходит четыре раза в год.

Максимальный объем статьи с подробными доказательствами — 20 машинописных страниц, краткого сообщения — 4 машинописные страницы.

Том 21, выпуск 4, 1987

ОКТАБРЬ — ДЕКАБРЬ

Журнал основан в 1967 году

Главный редактор журнала И. М. ГЕЛЬФАНД

Редакционная коллегия:

**М. С. АГРАНОВИЧ, В. И. АРНОЛЬД (зам. главного редактора),
С. Г. ГИНДИКИН, А. А. КИРИЛЛОВ,
А. Г. КОСТЮЧЕНКО (зам. главного редактора), М. Г. КРЕЙН,
М. М. ЛАВРЕНТЬЕВ, Б. Я. ЛЕВИН, В. Б. ЛИДСКИЙ, В. А. МАРЧЕНКО,
С. Н. МЕРГЕЛЯН, Н. К. НИКОЛЬСКИЙ, С. П. НОВИКОВ,
М. К. ПОЛИВАНОВ, Л. Д. ФАДДЕЕВ**

**ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ**

Адрес редакции:

117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15, тел. 234-07-95

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы.

«Функциональный анализ и его приложения», 1987

УДК 517.5

ОПЕРАТОРЫ СИММЕТРИЗАЦИИ В ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ КОЛЬЦАХ

А. Ласку, М.-П. Шютценберже¹⁾

Алгебра Гекке симметрической группы $\mathfrak{S}(n+1)$ может быть определена как фактор свободной алгебры $\mathbb{C}\langle D_1, \dots, D_n \rangle$ по соотношениям Кокстера $D_i D_j = D_j D_i$ при $|j - i| \geq 2$, $D_i D_{i+1} D_i = D_{i+1} D_i D_{i+1}$ и соотношению Гекке $D_i D_i = q D_i + r$.

Более конкретный подход реализует эту алгебру как алгебру рациональных симметризирующих операторов на кольце многочленов (т. е., если угодно, в эквивариантных когомологиях или кольце Гротендика многообразия флагов).

В этой заметке мы характеризуем операторы, удовлетворяющие указанным соотношениям, а также некоторым дополнительным условиям. Они образуют семейство, зависящее от пяти (однородных) параметров и допускающее ряд интересных вырожденных случаев, рассмотренных в [1—3]. Мы приводим также разложение всех рациональных симметризаторов по базису из перестановок и по базису из «разделенных разностей». Наконец, мы следуем формулу типа Лейбница, обобщающую тождество Бернштейна — Гельфанда — Гельфанда [2].

В соответствии с современной практикой, все операторы будут действовать справа.

Пусть σ — транспозиция, меняющая местами символы a и b . Пусть $P, Q \neq 0$ — две рациональные функции от a и b . Сопоставим σ, P и Q рациональный оператор D_σ : $f \rightarrow f D_\sigma = f P + f^\sigma Q$, действующий на рациональные функции.

Имеется 4 известных примера (см. [4]): σ — транспозиция a и b ; ∂ — разделенная разность: $f \partial = (f - f^\sigma)/(a - b)$; π — выпуклый симметризатор: $f \pi = (f a - f^\sigma b)/(a - b)$; $(1 - \pi)$ — дополнение к π : $f(1 - \pi) = (-f + f^\sigma) b/(a - b)$.

Рассмотрим теперь два оператора, действующие на различные пары символов. Если эти две пары не пересекаются, то операторы коммутируют. Предположим теперь, что наши пары — это (a, b) и (b, c) ; пусть σ та же, что выше, а τ — транспозиция b и c . Пусть также D и D' — соответствующие операторы: $f D = f P(a, b) + f^\sigma Q(a, b)$, $f D' = f P'(b, c) + f^\tau Q'(b, c)$, где P' и $Q' \neq 0$ — рациональные функции от b и c .

Т е о р е м а 1. Пусть a, b, c — три символа, а D и D' — соответствующие операторы. Предположим, что оператор D обратим, что $P \neq 0$ и что операторы удовлетворяют соотношению Кокстера $DD'D = D'DD'$. Тогда для того, чтобы операторы D и D' сохраняли кольцо многочленов $\mathbb{C}[a, b, c]$, необходимо и достаточно, чтобы существовали скаляры $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta$ с $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, $\eta \neq 0$, $\eta \neq \alpha\delta - \beta\gamma$, такие, что $P(a, b) = (\alpha a + \beta) \cdot (\gamma b + \delta)/(a - b) = P'(a, b)$ и $Q = \eta - P = Q'$. В этом случае D и D' удовлетворяют одному и тому же соотношению Гекке $DD = D(\alpha\delta - \beta\gamma) + \eta(\eta - \alpha\delta + \beta\gamma)$.

Полное обсуждение, слишком длинное, чтобы приводить его здесь, содержит некоммутативные вычисления из [5] и показывает, что неравенства между численными параметрами не являются необходимыми для выполнения соотношений Кокстера.

З а м е ч а н и е. Оператор, даваемый теоремой, может также быть записан в виде $D = \partial(\alpha a + \beta)(\gamma b + \delta) + \sigma\eta$. Он может быть получен из оператора $\pi + \sigma\eta'$ с помощью дробно-линейного преобразования $\{a, b\} \rightarrow \{p(a), p(b)\}$, где $p(x) = (\alpha x + \beta)/(\gamma x + \delta)$. В самом деле, образ оператора π под действием p — это оператор $f \rightarrow f p^\partial = (f p(a) - f^\sigma p(b))/(p(a) - p(b)) = f[\partial(\alpha a + \beta)(\gamma b + \delta)/(\alpha\delta - \beta\gamma) + \sigma]$.

Любопытно, что этот оператор при $\alpha = 1, \gamma = 0$ действует на кольце Гротендика многообразия флагов, в то время как при $\alpha = \gamma = 0$ он действует на кольце когомологий.

Пусть $A = \{a_1, \dots, a_{n+1}\}$ — некоторый алфавит. Каждой перестановке $\mu \in \mathfrak{S}(A)$ соответствует разделенная разность ∂_μ , которая может быть представлена в виде произведения элементарных разделенных разностей ∂_{σ_i} , где σ_i — это транспозиция символов a_i и a_{i+1} (см. [2—4]).

Пусть E — алгебра операторов $\nabla: \mathbb{C}[A] \rightarrow \mathbb{C}[A]$ вида $\nabla = \sum_{\zeta \in \mathfrak{S}(A)} \zeta R_\zeta$, где коэффициенты R_ζ являются рациональными функциями от элементов алфавита A . В частности, все разделенные разности ∂_μ лежат в E . Обратно, все перестановки $\zeta \in \mathfrak{S}(A)$ можно выразить через операторы ∂_μ .

Рассмотрим второй алфавит $Z = \{z_1, \dots, z_{n+1}\}$ и «полу-результант» $X = \prod_{i+j \leq n+1} (a_i - z_j)$; обозначим через θ специализацию $z_1 \rightarrow a_1, \dots, z_{n+1} \rightarrow a_{n+1}$. Обо-

¹⁾ Перевод с английского А. В. Зелевинского.

значим через Δ определитель Вандермонда $\Delta = \prod_{i < j} (a_i - a_j)$ и через ω максимальный элемент группы $\mathfrak{S}(A)$, т. е. инволюцию, переставляющую каждый элемент a_i с a_{n+2-i} ; тогда легко проверить следующую лемму.

Л е м м а 2. Для всех $\mu \in \mathfrak{S}(A)$, $\mu \neq \omega$ операторы $X\mu\theta$ и $X\partial_\mu\theta$ равны нулю; кроме того, $X\omega\theta = \Delta\omega$ и $X\partial_\omega\theta = \omega$.

Это сразу же позволяет разложить произвольный элемент алгебры E по базису $\{\zeta\}$ или по базису $\{\partial_\mu\}$:

П р е д л о ж е н и е 3. 1) Пространство E является свободным $\mathbb{C}[A]$ -модулем с базисом $\{\partial_\mu, \mu \in \mathfrak{S}(A)\}$.

2) Каждый элемент $\nabla \in E$ может быть записан в виде

$$\nabla = \sum_{\zeta} (X\nabla_{\omega\zeta\theta\omega}) \partial_{\zeta^{-1}}.$$

3) Пусть $\nabla = \sum \zeta R_\zeta$ — элемент алгебры E . Тогда для всех перестановок μ имеем $X\omega\mu^{-1}\nabla\theta = (-1)^{l(\omega)}\Delta R_\mu$.

С л е д с т в и е 4. Коэффициенты в разложении элемента ∂_ν по базису $\{\mu\}$ с точностью до знака и множителя Δ совпадают с коэффициентами в разложении μ по базису $\{\partial_\nu\}$, т. е.

$$\partial_\nu\Delta(-1)^{l(\omega)} = \sum \mu (X\omega\mu^{-1}\partial_\nu\theta).$$

Это свойство по-видимому не было замечено ранее (ср. [1, предложение 4.24; 2, теорема 5.9; 6]). Лемма 2, предложение 3 и следствие 4 могут быть сформулированы в чисто геометрических терминах, поскольку «полу-результант» допускает геометрическую интерпретацию как класс диагонального вложения многообразия флагов.

П р и м е р: симметрическая группа $\mathfrak{S}(a, b, c)$. Пусть σ_1 — транспозиция (a, b) , σ_2 — транспозиция (b, c) , а ∂_1, ∂_2 — соответствующие разделенные разности. Тогда $1\Delta = (a - b)(a - c)(b - c)$; $\partial_1\Delta = (1 - \sigma_1)(a - c)(b - c)$; $\partial_2\Delta = (1 - \sigma_2)(a - b)(a - c)$; $\partial_1\partial_2\Delta = (1 - \sigma_1)(a - c) + (\sigma_1 - 1)\sigma_2(a - b)$; $\partial_2\partial_1\Delta = (1 - \sigma_2)(a - c) + (\sigma_2 - 1)\sigma_1(b - c)$; $\partial_1\partial_2\partial_1\Delta = 1 - \sigma_1 - \sigma_2 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_1 - \sigma_1\sigma_2\sigma_1$. С другой стороны, $\sigma_1 = (a - b)\partial_1 - 1$; $\sigma_2 = (b - c)\partial_2 - 1$; $\sigma_1\sigma_2 = (a - b)(a - c)\partial_1\partial_2 - (a - b)\partial_1 - (a - c)\partial_2 + 1$; $\sigma_2\sigma_1 = (a - c)(b - c)\partial_2\partial_1 - (a - c)\partial_1 - (b - c)\partial_2 + 1$; $\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \omega = \Delta\omega - (a - b)(a - c)\partial_1\partial_2 - (a - c)(b - c)\partial_2\partial_1 + (a - c)(\partial_1 + \partial_2) - 1$.

Алгебра E порождает некоммутативное исчисление конечных разностей, однако, пока систематически изучались лишь частные случаи $A \rightarrow \{a, a, \dots\}$, $A \rightarrow \{\varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon, \dots\}$ или $A \rightarrow \{a, aq, aq^2, \dots\}$.

В качестве примера приведем для общего случая следующую формулу типа Лейбница. Пусть p, k — два натуральных числа, $\tau_1, \dots, \tau_p$ — это p транспозиций, а $\partial_1, \dots, \partial_p$ — соответствующие разделенные разности. Для каждой матрицы $\nabla = (\nabla_{ij})_{1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq p}$, составленной из операторов $\nabla_{ij} \in E$, и для каждой k функций $f_1, \dots, f_k$ обозначим через $f_1 \cdot \dots \cdot f_k \nabla$ произведение $(f_1 \nabla_{11} \cdot \dots \cdot \nabla_{1p}) \cdot \dots \cdot (f_k \nabla_{k1} \cdot \dots \cdot \nabla_{kp})$.

П р е д л о ж е н и е 5. Для каждой k функций $f_1, \dots, f_k$ и p разделенных разностей $\partial_1, \dots, \partial_p$ справедливо равенство $f_1 \cdot \dots \cdot f_k \partial_1 \cdot \dots \cdot \partial_p = \sum f_1 \cdot \dots \cdot f_k \nabla$, где сумма берется по k^p матрицам ∇ , таким, что для всех j ($1 \leq j \leq p$) j -й столбец матрицы ∇ имеет вид $\tau_j, \dots, \tau_j, \partial_j, 1, \dots, 1$, т. е. состоит из нескольких экземпляров оператора τ_j , затем ровно одного ∂_j и нескольких единичных операторов.

В случае когда $k = p$, и все $f_1, \dots, f_k$ — многочлены степени 1, мы получаем особенно интересную формулу, принадлежащую Бернштейну — Гельфанду — Гельфанду [2, теорема 3.12].

П р е д л о ж е н и е 6. Пусть μ — перестановка длины $l(\mu) = p$, а $f_1, \dots, f_p$ — многочлены степени 1. Тогда $f_1 \cdot \dots \cdot f_p \partial_{\mu^{-1}} = \sum (f_1 \partial_{\tau_1}) \cdot \dots \cdot (f_p \partial_{\tau_p})$, где сумма берется по всем приведенным разложениям перестановки μ в произведение транспозиций, т. е. по всем произведениям $\mu = \tau_1 \cdot \dots \cdot \tau_p$, таким, что $l(\tau_1 \cdot \dots \cdot \tau_j) = j$ для $1 \leq j \leq p$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kostant B., Kumar S. // Advances in Math.— 1986. V. 62 — P. 187—237.
2. Бернштейн И. Н., Гельфанд И. М., Гельфанд С. И. // УМН.— 1973, Т. 28, вып. 3.— С. 1—26.
3. Demazure M. // Invent. Math.— 1973. V. 24.— P. 287—301.
4. Lascoux A., Schutzenberger M.-P. // Lect. Notes in Math.— 1983. V. 996.
5. Gutkin E. // Preprints Los Angeles University, 1986.
6. Arabia A. // C. R. Acad. Sc. Paris.— 1985. V. 301.— P. 45—48.

Университет
Париж-7

Поступило в редакцию
3 апреля 1987 г.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

ГОТОВЯТСЯ К ПЕЧАТИ В 1988 г.:

Кириллов А. А., Гвишиани А. Д. Теоремы и задачи функционального анализа — 2-е изд., перераб. — 25 л. — 1 р. 20 к. (темплан 1988 г., № 75).

Книгу отличает теоретическая глубина и строгость изложения, а также оригинальное построение. Второе издание переработано в сторону усиления прикладной направленности многих вопросов функционального анализа, исключения некоторых специальных и включения более простых понятий и задач.

Левитан Б. М., Саргсян И. С. Операторы Штурма — Лиувилля и Дирака — 25 л. — 3 р. 90 к. (темплан 1988 г., № 29).

Излагаются основные вопросы спектральной теории оператора Штурма — Лиувилля и одномерного оператора Дирака, а именно: асимптотика собственных значений и собственных функций, разложение по собственным функциям, исследование спектра, асимптотическое распределение собственных значений, вычисление регуляризованных следов, решение обратных задач. Может служить введением в общую спектральную теорию самосопряженных операторов в пространстве Гильберта.

Мынбасев К. Т., Отелбаев М. О. Весовые фундаментальные пространства и спектр дифференциальных операторов — 20 л. — 3 р. 30 к. (темплан 1988 г., № 33).

Рассматриваются вопросы, касающиеся двух областей функционального анализа, — теорем вложения и спектральной теории дифференциальных операторов. Излагаются разностные теоремы вложения, используемые в вычислительной математике, имеются упражнения и постановки новых задач.

Никишин Е. М., Сорокин В. Н. Рациональные аппроксимации и ортогональность — 15 л. — 1 р. 90 к. (темплан 1988 г., № 34).

Рассматриваются аналитические функции, ортогональные многочлены, спектральная теория операторов, теория потенциалов, теория аппроксимации Паде и т. д. Книгу можно считать введением в указанный круг вопросов.

Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике — 3-е изд., доп. — 23 л. — 3 р. 70 к. (темплан 1988 г., № 45.)

Излагаются теория функциональных пространств, вариационный метод решения краевых задач для эллиптических уравнений, в том числе с краевыми условиями, заданными на многообразиях различных размерностей, а также теория задач Коши для гиперболических уравнений второго порядка с переменными коэффициентами как линейного, так и квазилинейного типа.

Предварительные заказы на данные книги принимаются без ограничения магазинами Книготорга и Академкниги, распространяющими физико-математическую литературу. Только своевременно оформленный заказ гарантирует получение книги.

СОДЕРЖАНИЕ

Варченко А. Н., Гельфанд И. М. О функциях Хевисайда конфигурации гиперплоскостей	1
Гинзбург В. А. Эквивариантные когомологии и кэлерова геометрия	19
Кириллов А. А., Юрьев Д. В. Кэлерова геометрия бесконечномерного однородного пространства $M = \text{Diff}_+(S^1)/\text{Rot}(S^1)$	35
Кричевер И. М., Новиков С. П. Алгебры типа Вирасоро, римановы поверхности и струны в пространстве Минковского	47

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Балинский А. А. Классификация простых супералгебр Ли типа Вирасоро, Неве — Шварца и Рамона	62
Бялый М. Л. О полиномиальных по импульсам первых интегралах для механической системы на двумерном торе	64
Веселов В. Ф. О связи треугольной и функциональной моделей несамосопряженного оператора	66
Голенищева-Кутузова М. И. Функциональные модули моментов для групп диффеоморфизмов двумерных многообразий	69
Губреев Г. М. Базисность семейств функций типа Миттаг — Леффлера, преобразования Джрбашяка и условие Макенхоупта	71
Казарновский Б. Я. Многогранники Ньютона и формула Безу для матричных функций конечномерных представлений	73
Карабегов А. В. Квантование на однополостном гиперболоиде	75
Ласку А., Шютценберже М.-П. Операторы симметризации в полиномиальных кольцах	77
Миклашевский И. Р. Конформная геометрия и уравнение Эйнштейна	79
Овсиенко В. Ю., Хесин Б. А. Суперуравнение Кортвега — де Фриза как уравнение Эйлера	81
Рчеулишвили Г. Л., Савельев М. В. Многомерные нелинейные системы, связанные с грассмановыми многообразиями BI, DI	83
Рыбкин А. В. Формула следов для сжимающего и унитарного операторов	85
Сафаров Ю. Г. Асимптотика спектра краевой задачи с периодическими билиардными траекториями	88
Сидоренко Н. Г. Неизоморфность некоторых банаховых пространств гладких функций пространству непрерывных функций	91
Филимонов А. П., Цекановский Э. Р. Автоморфноинвариантные операторные узлы и факторизация их характеристических оператор-функций	94

Функциональный анализ и его приложения, 1987, т. 21, вып. 4.